TRATTATO ELEMENTARE DI ARITMETICA DI CARLO D'ANDREA

Carlo D'Andrea

TRATTATO ELEMENTARE

DI

ARITMETICA

OPERE DI CARLO D'ANDREA

Riassunto delle lezioni date alla scuola di ponti e strade, sullo stabilimento delle costruzioni e delle macchine, di Navier. Parte I[a], versione italiana con note ed aggiunte e con un' *appendice sui ponti sospesi*, di C. d'Andrea. Un vol. in-8 grande, 1836. . . . . D. 2,40

Supplemento alle note ed aggiunte suddette, 1845. 0,20

Trattato elementare di Algebra. Un grosso vol. in-8, 1840. . . . . » 3,60

Elementi di Algebra. Un vol. in-8, 1844 . . . » 1,30

Prolusione per l' apertura della cattedra di meccanica applicata nel R. Collegio Militare, in-8, 1845. . . . . » 0,10

Catechismo di Aritmetica, 2[a] edizione, in-8, 1845 » 0,20

Trattato elementare di Aritmetica, 2[a] edizione accresciuta dell' *aritmetica filosofica* e di altri articoli. Un vol. in-8, 1845 . . . . » 0,60

Aritmetica filosofica, 1845. . . . . » 0,10

Elementi di aritmetica, estratti dal Trattato, per uso delle scuole, in-8, 1845 . . . . » 0,40

TRATTATO ELEMENTARE

DI

ARITMETICA

DI

CARLO D'ANDREA

INGEGNERE DEL CORPO DI ACQUE E STRADE, PROFESSORE DI MECCANICA APPLICATA NELLA SCUOLA DI APPLICAZIONE DEL DETTO CORPO, E NEL R. COLLEGIO MILITARE, SOCIO RESIDENTE DELL'ACCADEMIA PONTANIANA, E SOCIO CORRISPONDENTE DELLA R. ACCADEMIA DI BELLE ARTI.

SECONDA EDIZIONE

considerevolmente migliorata; accresciuta di un articolo sull'uso delle cifre negative, del nuovo sistema di misure del Regno di Napoli, e di un'appendice contenente l'ARITMETICA FILOSOFICA.

NAPOLI

Stabilimento tipografico SEGUIN, Banchi Nuovi 15.

1845

Questo trattato elementare di Aritmetica, quantunque scritto per servir d'introduzione allo studio più generale delle quantità, contiene tutte le particolarità che alla speditezza del calcolo pratico possono abbisognare. Non v'ha classe di persone che nell'esercizio delle ordinarie bisogne non sia obbligato di ricorrere al calcolo numerico; nè v'ha risultamento di analisi matematica, che per poter esser applicato non si debba in numeri esprimere e convertire. Per la qual cosa una scienza di un uso così universale conviene che in tal modo trattata sia, che, mentre le fondamenta prepara per sostenere il vasto edifizio delle matematiche discipline, quello sviluppo contenga che rende facile l'applicazione de' principii generali agli svariati casi che i numeri, relativamente alla diversa forma che possono rivestire, danno luogo a dover trattare.

A conseguir questo duplice oggetto, era d'uopo non solo di non trasandare alcun principio, comecchè difficile paresse, che al rigor delle dimostrazioni fosse necessario, ma ancora di presentare il medesimo calcolo sotto diversi aspetti, a fin di mostrare l'identità de' risultamenti, e richiamare le operazioni sotto un punto di vista generale. Scoperto allora il legame che riunisce le diverse specie di numeri, e distinto il principio generale, da cui ciascuna operazione dipende, dalle regole relative al modo di rappresentare i numeri, ciascuno sarà nel caso d'introdursi in un calcolo per la via più breve e più spianata, e di verificarne l'esattezza variando il sistema delle operazioni parziali di cui si compone.

Ma il saper calcolare a nulla varrebbe di certo, se non si sapesse, da quale delle quattro operazioni la soluzione di una quistione dipende.

Dell'addizione e della sottrazione basta aver ben intesa la definizione per conoscere in quali casi faccia mestieri avervi ricorso.

La moltiplicazione e la divisione si riportano a quistioni alcun poco più difficili. Ma l'idea di proporzione che racchiudono fa prendere a queste due operazioni un senso più esteso di quello che avrebbero, se come casi particolari dell'addizione o della sottrazione si considerassero, imprime ad esse un carattere che fa con facilità distinguere i diversi casi nei quali fa d'uopo servirsene, e rende luminose le regole assegnate intorno alla natura del prodotto e del quoziente. Le varie considerazioni su i numeri messi in relazione e tra loro e con l'unità formano insensibilmente l'idea del rapporto, mentre la moltiplicazione e la divisione preparano gli elementi per l'idea della proporzione. La teorica de' rapporti e della proporzione non serve dunque che a dare a quelle idee che già si posseggono un aspetto diverso e una maggior estensione, e a metter nello stato di sviluppare agevolmente in una quistione le relazioni che uniscono le quantità date a quelle che si cercano.

Senza estendermi a parlar partitamente delle materie di cui ho trattato, dirò poche parole di alcune cose, delle quali, per essermi allontanato dal sistema generalmente seguìto, mi convien dare ragione, ed altre accennerò che per la loro novità potrebbero essere riguardate di qualche interesse.

Dopo i numeri interi ho trattato immediatamente de' decimali, non solo perchè le regole del calcolo sono comuni a queste due specie di numeri, ma perchè i decimali servono a dare un nuovo sviluppo al sistema di numerazione estendendolo a rappresentar parti minori dell'unità. Resa così la teorica de' decimali indipendente dalle frazioni, il confronto de' metodi relativi alle frazioni ordinarie e alle decimali fa meglio sentire a quale condizione è dovuta in queste ultime la soppressione de' denominatori e la facilità del calcolo.

Moltissimi teoremi sulla divisibilità de' numeri e sulla teorica de' resti rendono compiuto il trattato delle frazioni, che formano la parte più importante dell'Aritmetica, come quelle alle quali tutte le altre specie di numeri si possono agevolmente riportare.

Dopo i numeri complessi segue un capitolo su i diffe-

renti sistemi di numerazione, il quale, se non ha un uso diretto nel calcolo, serve a rannodare i numeri complessi co' decimali e colle frazioni.

Di poi si passa alle proporzioni, il cui studio non può esser molto ritardato, per lo soccorso che prestar deve alla geometria.

Segue un capitolo sul calcolo pratico. Ivi si mostra come nella moltiplicazione e divisione de' numeri approssimati si evitano i calcoli inutili; e richiamando l'attenzione sui principii da' quali le operazioni sui numeri dipendono, si spiana la via a quelle abbreviazioni di calcolo che non solo producono guadagno di tempo, ma allontanano le cagioni degli errori.

Il Capo X contiene diverse teoriche importanti. Nel primo articolo si tratta del complemento aritmetico; e questo conduce naturalmente a parlare nel secondo articolo de' numeri scritti con cifre positive e negative, il cui uso riesce principalmente vantaggioso nella divisione e nella teorica de' resti.

Nell'articolo terzo si espone un metodo elegante proposto da Fourier per eseguir brevemente la divisione, quando il divisore ha moltissime cifre. I principii alcun poco astrusi a' quali fa d'uopo ricorrere, e le eccezioni che danno luogo a cambiar sovente il corso dell'operazioni, potevano essere un ostacolo per presentarlo sotto forma elementare. Ho posto ogni studio per superarlo, in vista dell'uso importante ed esteso che può farsene; ed ho supplito alla dimostrazione con la maggior chiarezza che da me si poteva e con tutto il rigore che la scienza esige, nulla omettendo di ciò che può facilitarne l'intelligenza e la pratica. Il pregio singolare di questa divisione sta in questo, che a qualunque punto si finisca l'operazione si troverà sempre di non aver fatto alcun calcolo inutile.

Questo metodo mi ha dato occasione di mostrare come si può ottenere il prodotto di due numeri, qualunque sia il numero delle cifre di cui si compongono, senza scrivere i prodotti parziali. La qual ricerca, se è utile per far conoscere gli elementi da' quali ciascuna cifra del pro-

dotto risulta, eccita la curiosità per la pratica alla quale conduce; e può esser, come esercizio di ragionamento, di non lieve vantaggio.

Nell'art. quarto si dice delle frazioni continue quel poco che basta per convertire una frazione in un'altra che con termini più semplici si approssimi alla data più di qualunque altra che avesse un denominatore minore.

L'ultimo Capitolo, nel quale si tratta delle misure, ha per oggetto di presentare un'utile applicazione delle cose precedentemente esposte, di rischiarar sempre più le idee di misura e di rapporto, di agevolare il calcolo commerciale, e di dar compimento alla teorica de' numeri complessi. Ma lo studio delle cose in esso contenuto deve essere riserbato pel tempo, in cui siensi già fatti gli Elementi di Geometria.

Questo trattato è seguìto da un'appendice, che a somiglianza di altre opere dello stesso genere ho intitolato *Aritmetica filosofica*. In essa sono rapidamente esposti i principii astratti del calcolo; ed ha per oggetto di mostrare qual è la parte che nelle diverse operazioni è indipendente dalla forma de' numeri e dal modo di rappresentarli, affinchè richiamate le diverse teoriche sotto un sol punto di vista, la mente dell'Allievo divenga capace di abbracciarle tutte con un sol atto.

Oltre l'utilità grandissima che da questa astrazione deriva per rendersi veramente padrone della scienza, la stessa Appendice può servire mirabilmente per far che ciascuno possa in brev'ora tutta l'Aritmetica ridursi alla memoria, senza bisogno di ripercorrere il Trattato, pel quale converrebbe spender non poco tempo, e vincer la noja che le ripetizioni delle cose fatte sogliono assai di frequente nell'animo ingenerare.

SPIEGAZIONE DI ALCUNI VOCABOLI

Assioma è una verità evidente.
Teorema è una verità che deve essere dimostrata.
Problema è una quistione da risolversi.
Corollario è una conseguenza che si ricava da una verità già dimostrata.

TRATTATO ELEMENTARE

DI

ARITMETICA.

NOZIONI PRELIMINARI

1. Dicesi *grandezza o quantità* tutto ciò che è o si può concepir suscettibile di aumento o di diminuzione determinabile. La scienza che esamina le proprietà della grandezza, o nello stato in cui è o nel suo aumento e decremento, si chiama *Matematica*.

2. Il carattere distintivo della grandezza consiste nella possibilità di determinare il suo aumento o decremento. Una grandezza variando ne produce delle altre della medesima specie; e la variazione non si può determinare che col confronto. Allorchè due grandezze della medesima specie si paragonano, si ha per oggetto di vedere in che modo una può esser formata per mezzo dell'altra, cioè di determinare in che modo dovrebbesi far variare una di esse per produrre l'altra.

Allorchè tutte le grandezze di una data specie si paragonano sempre alla medesima grandezza, quella che serve di termine comune di paragone si chiama *unità*. Quando una quantità si paragona alla sua unità si ha per oggetto di vedere quante volte questa unità vi è contenuta. Da questo confronto siam portati a concepir la grandezza divisa in parti, ciascuna eguale alla sua unità; o che questa divisione esista o che non esista nella grandezza. Così, dicendo che la distanza da un paese ad un altro è dieci miglia, concepisco la strada divisa in dieci parti, delle quali ognuna è un miglio, benchè queste divisioni non esistono nella strada stessa. Dicendo poi 50 uomini, trovo in effetti che ogni uomo è diviso e staccato dall'altro, e questa quantità non è che la collezione di più cose simili.

Si può inoltre aver per oggetto, non di determinare quanto è una grandezza rispetto ad un'altra della medesima specie, ma sibbene le proprietà della medesima dipendenti unicamente dalla sua figura; allora la grandezza si presenta sotto forma continua, o come

un sol tutto senza divisioni di parti. Considerando per es. il cerchio possiamo proporci di ricercarne le proprietà, le quali, essendo indipendenti dalla sua grandezza assoluta, convengono egualmente a tutti i cerchi; non vi è in tal caso bisogno di rapportare il cerchio alla sua unità, e concepirlo perciò diviso in parti.

Si distinguono adunque due specie di quantità o grandezze, la prima è detta *discreta*, la seconda *continua*; e siccome nelle grandezze della prima specie si ha per oggetto di determinare il *quanto* è l'una rispetto all'altra, sarà forse più proprio applicare alla prima la parola *quantità* e dirla *quantità discreta*, e chiamar l'altra *grandezza continua*.

L'esame delle proprietà della grandezza continua è l'oggetto della *Geometria*; la determinazione delle proprietà o delle relazioni che hanno tra loro le quantità discrete costituisce in generale la *scienza del calcolo*, che ha il suo incominciamento dall'*Aritmetica*.

3. Il risultamento del confronto fatto di una quantità con la sua unità si chiama *numero*: esso esprime quante unità o parti dell'unità sono necessarie per formare la quantità data. Il numero adunque non risveglia alcuna idea se non si è acquistata prima quella dell'unità corrispondente. La proposizione: *questo muro è* 10 *metri*, non dà alcuna idea della lunghezza del muro se non a chi ha quella del metro.

L'*Aritmetica* è precisamente la scienza de' numeri.

4. Un numero, se è esattamente composto di più unità, dicesi *intero*; se esprime una parte dell'unità, *frazione*; e se rappresenta diverse unità congiunte a parti dell'unità stessa, dicesi *frazionario*. Un numero intero si può perciò riguardare come la riunione di più unità o come la collezione di più cose simili.

Di più, un numero si dice *astratto* se non si riferisce ad una unità di determinata specie, come sette, tre; e si chiama *concreto* quando è nominata la specie di unità, come due canne, sei miglia, tre libbre.

CAPO I.

DE' NUMERI INTERI

5. Le ricerche principali da farsi su i numeri riguardano o la loro composizione o le loro proprietà. Il modo più facile per comporre i numeri consiste nell'aggiunger successivamente un'unità all'altra. In tal guisa aggiungendo un'unità a se stessa si forma il numero due, a questo numero aggiungendo un'altra unità si forma il tre; e così di seguito. Questo stesso modo di composizione mostra che non vi è limite alla grandezza de' numeri, giacchè per quanto grande possa esser un numero, si potrà sempre, aggiungendo a quello un'altra unità, formarne uno più grande. Esistendo dunque infiniti numeri, e bisognando inoltre per poter ragionar di essi aver de' caratteri per rappresentarli e delle parole per esprimerli, è facile concepire che sarebbe stato impossibile conseguir questo intento se non si fosse inventato un sistema, che offrisse il modo di rappresentare ed esprimere tutti i numeri possibili con la sola combinazione di pochi nomi e di pochi caratteri. Questo è ciò che costituisce la *numerazione parlata* e *la numerazione scritta*.

ARTICOLO I.

Della Numerazione.

6. La numerazione parlata è stabilita sopra un sistema, mediante il quale con poche parole, poste in combinazione e variate nelle desinenze, si possono esprimere tutti i numeri possibili. A tal uopo si sono distinti diversi ordini di unità, e ogni ordine comprende solamente nove numeri. I primi nove numeri, che sono espressi per le unità del prim'ordine, si enunciano con le parole seguenti.

uno, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*.

La prima esprime l'unità, la seconda esprime il numero che si forma aggiungendo all'unità un'altra unità; la terza, il numero che si forma aggiungendo un'altra unità al precedente; e così fino al nove. Il numero nove più uno si esprime con la parola *dieci*; e questo numero forma l'unità del secondo ordine, la quale è chiamata *diecina*.
Facendo uso di questa nuova unità si è contato per diecine come si era contato per unità, dicendo; *dieci*, *venti* (*) *trenta*, *quaranta*,

(*) La parola venti si deve riguardare come eccezione di lingua, o come un alterazione della parola *duenta*.

cinquanta, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta*. Si vede dunque che cinquanta per es. esprime la collezione di cinque diecine, ossia è il numero che risulta aggiungendo a quattro diecine un'altra diecina.

Per esprimere le collezioni di alcune unità semplici con le diecine, si riuniscono le due parole relative alle unità di ciascun ordine. Così *quarantadue* esprime la collezione di quattro unità del second'ordine e due del primo ordine. Fanno eccezione le parole *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici* e *sedici*, nelle quali la parola che si riferisce alle unità semplici precede quella che si rapporta alle unità del second'ordine.

Aggiungendo a nove diecine un altra diecina si forma il numero composto di dieci diecine, che si è espresso con la parola *cento*. Si è preso questo numero per unità del terz' ordine, detta anche *centinajo*, e si è contato per centinaja, come per gli ordini precedenti adoperando le parole *duecento* (*), *trecento*, *quattrocento*, ec. con legge costante.

La parola *mille* esprime dieci centinaja, o un'unità dieci volte più grande del centinajo. Le collezioni di queste unità fino al nove si esprimono colle parole *duemila*, *tremila*, ec.; e formano le unità del quarto ordine, dette anche *migliaja*.

Dopo le quali seguono le unità del quinto ordine, o le *diecine di migliaja* che si esprimono colle stesse parole radicali, cioè *diecimila*, *ventimila*, ec. Le unità del sest'ordine o le *centinaja di migliaja* si esprimono colle parole *centomila*, *duecentomila*, ec.

Le unità del settim'ordine, eguali a dieci del sesto ordine, son dette *milioni*, voce derivata dalla parola mille. Poi seguono con la medesima legge le *diecine di milioni*; poi le *centinaja di milioni*. Le unità del 10° ordine sono dette *bilioni*; e così, di tre in tre, seguono i *trilioni*, i *quadrilioni*, ec.; fino all'infinito.

Si vede dunque che le parole radicali non sono che dodici, cioè: *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, *dieci*, *cento*, *mille*; ed è bastato il distinguer le unità in ordini per poter con queste poche parole esprimer tutti i numeri possibili.

Per esprimere i numeri intermedi, quelli cioè che comprendono diversi ordini di unità basta adoperare le voci che a ciascun'ordine si riferiscono. Così il numero: *due milioni*, *settecento quattromila*, *duecento novantotto*, esprime la collezione di due unità del settimo ordine, sette unità del sesto, quattro del quarto, due del terzo, nove del secondo e otto del prim'ordine.

Si tenga presente che ogni unità di ciascun ordine equivale a dieci unità dell'ordine da cui è preceduta; il centinajo equivale a dieci diecine, il migliajo a dieci centinaja, e così sempre con la stessa legge.

Si noti pure che per poter meglio estender la nomenclatura, oltre la distinzione delle unità in ordini, si è fatta un'altra distinzione in classi, ciascuna delle quali comprende unità, diecine e centi-

(*) Per vezzo di lingua si dice anche *dugento*, *dugencinquanta*, ec.

naja ; e allora le classi procedono col seguente ordine : *unità* , *migliaja* , *milioni* , *bilioni*, ec.: il che dà un maggiore slancio per passare ai numeri molto grandi.

7. Nella numerazione scritta si distinguono gli stessi ordini di unità come nella numerazione parlata , e questi procedono con la medesima legge, cioè che ogni unità debba valere dieci unità dell'ordine precedente.

Ma siccome ogni ordine di unità comprende nove numeri solamente, i detti nove numeri si sono rappresentati sempre con le medesime cifre , le quali sono :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
uno ,	due ,	tre ,	quattro,	cinque,	sei ,	sette ,	otto ,	nove

Ma poi si è convenuto che l'ordine di unità cui si riferisce una cifra fosse indicato dal posto che questa occupa nella serie delle cifre scritte , contando i posti dalla destra verso la sinistra. Quindi una cifra , scritta al primo posto a destra , indica unità semplici o del prim'ordine ; scritta a sinistra delle unità o al secondo posto , unità del second'ordine o diecine ; scritta a sinistra delle diecine o al terzo posto , rappresenta centinaja ; e così si continua succedendosi le unità de' diversi ordini come nella numerazione parlata. Il numero 347 indica 3 centinaja 4 diecine e 7 unità.

Volendo però scrivere un numero in cui manca qualche ordine di unità , vi è bisogno , affinchè ogni cifra rimanga al posto che le compete , di metter nel luogo di quella che manca un segno di niun valore. Si adopera per tale oggetto la cifra 0 che si chiama *zero* , che non ha valore per sè stessa , ma serve a determinare il posto che ciascuna cifra deve avere. Considerando per es. 3700 , s'intenderà che i due zeri alla destra non servono che a situare il 7 al terzo posto e il 3 al quarto. Si vegga nel numero qui scritto il nome che corrisponde al posto di ciascuna cifra.

5	7	3	2	9	6	0	4	2	3	1
diecine di bilioni	bilioni	centinaja di milioni	diecine di milioni	milioni	centinaja di migliaja	diecine di migliaja	migliaja	centinaja	diecine	unità

Il zero che si trova nel posto delle diecine di migliaja indica , che non vi sono unità di quest'ordine.

Quindi il sistema di numerazione scritta è fondato sopra il principio , che ogni cifra , oltre il valore assoluto, ha un valore relativo

al posto che occupa. Bisogna perciò fissarsi bene in mente che una cifra qualunque, 7 per es., esprime sempre la collezione di 7 unità; ma l'unità cui si riferisce varia col sito, ed acquista un valore dieci volte più grande per ogni posto che la cifra avanza, dalla destra verso la sinistra.

Si vede da ciò, che col solo scriver le cifre l'una addossata all'altra si può rappresentare qualunque numero per quanto grande esso sia, senza bisogno di ricorrere ad altri segni; e l'idea felice di dare alle cifre due valori, uno assoluto l'altro di posizione, ha permesso di rappresentare tutti i numeri possibili con soli dieci caratteri.

È da osservarsi ancora che nella numerazione parlata si è adoperata una denominazione particolare per esprimere i primi quattro ordini di unità, cioè unità, diecine, centinaja, migliaja. Non potendosi continuare con lo stesso sistema senza incorrere nell'inconveniente di aver bisogno d'infinite parole, si dovette abbandonare, e le unità degli ordini seguenti furono espresse per mezzo di parole composte. Nella numerazione scritta domina un maggior grado di semplicità.

8. Il numero che indica quante cifre sono necessarie per scrivere tutti i numeri possibili, o pure che indica quante unità di un ordine sono necessarie per formare quella dell'ordine immediatamente superiore, si chiama la *base* del sistema. Perciò nel sistema in uso la base è 10 e il sistema si chiama *decimale*.

9. Per metter la scrittura in corrispondenza col linguaggio, si è convenuto che i numeri scritti fossero divisi in classi di tre cifre l'una cominciando dalla destra verso la sinistra. Risulta da questa disposizione, che ogni classe contiene unità, diecine e centinaja. La prima classe è delle unità semplici, la seconda delle migliaja, la terza de' milioni, la quarta de' bilioni, e così di seguito; siccome si vede scritto qui appresso.

trilioni	bilioni	milioni	migliaja	unità
324	058	396	204	502

La divisione delle classi è indicata col mettere un poco di distanza fra i numeri.

Basta dunque saper leggere tre numeri per leggerli tutti, purchè però si sappia l'ordine con cui si succedono le classi, il che è facile. Il numero precedente si leggerà: *trecentoventiquattro trilioni*, *cinquantotto bilioni*, ec.

Colla stessa facilità si scrivono tutt'i numeri possibili sotto la dettatura, purchè si sappia scrivere un numero composto di tre cifre. La sola attenzione da usare consiste nel distinguere quali sono le unità che mancano, per mettere il zero in luogo di esse, avvertendo sempre che ogni classe dev'esser di tre cifre (*).

(*) L'esposto sistema di nomenclatura non è generalmente seguito, specialmente dagli Autori italiani. I quali chiamano bilione l'unità del quinto terna-

10. Intorno al modo di leggere i numeri è necessario notare, che ogni cifra, riferendosi ad un unità particolare, si può considerare come isolata o indipendente dalle altre. Per es. il numero 548 rappresenta 5 centinaja, 4 diecine e 8 unità. Leggendolo secondo il linguaggio comune, cioè *cinquecento quarantotto*, si viene ad esprimer tutto il numero in unità del primo ordine, e propriamente si convertono le unità degli ordini superiori in unità semplici, imperocchè le 5 centinaja divengono cinquecento unità, e le 4 diecine si cambiano in 40 unità.

Ora l'uniformità del sistema permette di convertire all'istante le unità di un ordine qualunque in quelle di un ordine inferiore, e quindi nel leggere un numero si possono riunir le cifre in gruppi arbitrari, e allora si deve leggere ciascun gruppo secondo la maniera ordinaria e dargli il nome dell'unità cui appartiene la prima cifra a destra del gruppo. Per es. il gruppo 548 si leggerà sempre *cinquecento quarantotto*; ma l'unità sarà diversa secondo il posto in cui è collocata la prima cifra 8. Perciò il numero 54800 che dovrebbe leggersi *cinquantaquattro mila e ottocento*, si può leggere ancora 548 *centinaja*; così pure il numero 54837 si può leggere 548 *centinaja* e 37 *unità*, o anche 54 *migliaja*, e 837 *unità*, o pure 5483 *diecine* e 7 *unità*, e ancora 54 *migliaja* 83 *diecine* e 7 *unita*, ec.

ART. II.

Operazioni su i numeri interi.

11. Si è veduto (n° 5) come possono comporsi tutti i numeri coll'aggiunger successivamente un'unità dopo l'altra. Questo modo di composizione è troppo semplice per poter corrispondere a tutte le quistioni che possono presentarsi. Or le operazioni che si possono fare su i numeri hanno per oggetto la quistione generale seguente: *Dati due o più numeri, comporne altri cui i primi servono di elementi.*

I principii da' quali dipendono le operazioni da farsi sui numeri alcuni sono generali ed applicabili a numeri scritti secondo qualunque sistema, altri dipendono dal modo come colla ripetizione o divisione

---

rio, trilione quella del settimo, ec.; e chiamano poi migliaja di milioni, migliaja di bilioni, ec. le unità del quarto, del sesto, ec. ternario; e così procedendo di sei in sei cifre. Noi ci siamo attenuti a quello di sopra esposto: 1° perchè trovasi più universalmente adottato; 2° perchè ci è sembrato più ragionevole; 3° perchè di gran lunga più facile.

La divisione poi in classi di tre cifre l'una, non serve che a render più facile la lettura di un numero; il quale oggetto tanto più facilmente si conseguisce quanto maggiore corrispondenza vi è tra la numerazione scritta e la parlata. Ma quando si tratta di un numero composto di moltissime cifre, il leggerlo non arreca alcun vantaggio, nè serve a farne concepir la grandezza; sicchè riducendosi allora la cosa a dover contare il numero delle cifre, si può adottare qualunque altra divisione in classi. Ordinariamente si dividono le cifre a cinque a cinque, tanto perchè la ripetizione del cinque è facilissima, quanto perchè con un solo sguardo si distinguono benissimo le cinque cifre.

dell'unità principale si compongono altre unità di ordine superiore o inferiore. Le operazioni su i numeri interi, dipendendo solo dal sistema di numerazione, possono considerarsi come fatte sopra numeri astratti.

Ma per eseguirle con grande facilità, bisogna aver ben compreso il sistema di numerazione e tener presente la proprietà caratteristica di quel sistema, la quale consiste in questo: 1° che ogni cifra considerata isolatamente è rapportata alla sua unità particolare: 2° che ogni cifra si può riguardare come la diecina di quella che le sta a destra o come il centinajo di quella che sta di due posti più avanti, ec.

§. I. *Dell'Addizione.*

12. L'*addizione* è un'operazione mediante la quale, dati più numeri, si cerca di comporne un altro che contenga tante unità quante ne contengono tutt'i numeri presi insieme. Il risultamento dell'operazione, ossia il numero che si ottiene, si chiama *somma.*

13. Quando i numeri sono di una sola cifra, si fa l'addizione aggiungendo ad uno de' numeri dati successivamente tante unità quante ne contiene l'altro. Sicchè volendo a 7 aggiunger 4 si dirà: 7 *più* 1 *fa* 8, 8 *più* 1 *fa* 9, 9 *più* 1 *fa* 10, 10 *più* 1 *fa* 11. Si perviene così al numero 11 dopo quattro operazioni, nelle quali si è aggiunta sempre l'unità. Si può in seguito andare aggiungendo, in vece di una unità per volta, due o più unità; e basta un brevissimo esercizio per acquistar l'abitudine di eseguir a mente e con prontezza queste specie di addizioni.

Poichè 3 più 5 fa 8, i numeri 3 e 5 si possono considerare come le parti di cui è composto il numero 8. Sotto questo punto di veduta la somma è il tutto, che risulta dalle diverse parti prese insieme; sicchè questa operazione ha per oggetto di risolvere il seguente problema: *date le diverse parti che debbono comporre un tutto, trovare la quantità di cui si compone questo tutto.*

14. Per eseguir l'addizione de' numeri composti di più cifre conviene osservare, che non possono riunirsi che i numeri rapportati alla medesima unità. L'unità di un numero può esser diversa da quella di un altro o per la sua natura o per la sua grandezza. Quando l'unità è di natura diversa, l'addizione non ha senso nè può eseguirsi; di fatto sarebbe impossibile sommar 3 libbre con 5 ore. Quando poi l'unità è di grandezza diversa, l'operazione non può aver luogo se non si riducono prima i numeri ad unità della medesima grandezza. Trattandosi di numeri interi ed astratti, l'operazione è sempre possibile, perciò che essi si esprimono naturalmente per mezzo della stessa unità. In effetti 7 centinaja e 3 unità si sommano subito, perchè le 7 centinaja si convertono immediatamente in 700 unità.

Or quando i numeri da sommarsi sono composti di più cifre, l'o-

perazione si rende molto più semplice sommando separatamente le unità del medesimo ordine, cioè le diecine fra loro, le centinaja fra loro, ec. Si avranno così tante somme parziali per quanti sono gli ordini di unità contenuti nei numeri dati: e chiaro si vede che il numero risultante dalla riunione di tutte queste somme parziali esprimerà la somma totale. Se per es. si volesse far la somma de' numeri 321, 213 e 412, si avrebbero le tre somme: 6 unità, 4 diecine e 9 centinaja, le quali riunite compongono il numero 946.

```
321
213
412
---
946
```

Se una somma parziale risulta di più cifre, siccome la cifra posta a destra di un' altra può considerarsi come le diecine di questa, si scrivono le unità di detta somma parziale, e le diecine si riuniscono con quelle che compongono la colonna seguente, e si fa ciò che chiamasi *riporto*. Così nell'es. posto in margine la somma delle unità semplici è 29, numero composto di 9 unità e 2 diecine. Or come in seguito deve farsi la somma delle diecine, si scriverà il 9 e le 2 diecine si riuniscono a quelle de' numeri dati. La somma delle diecine colle 2 diecine riportate è 28. Per la stessa ragione si scrive l'8, e le due diecine, ossia centinaja, si uniscono alle centinaja de' numeri dati. E proseguendo in tal modo, si ottiene la somma addimandata.

```
 5728
  297
 3542
   79
 9743
-----
19389
```

L'operazione adunque è riportata all'addizione de' numeri di una sola cifra: e in effetti ogni somma parziale si trova con lo stesso metodo, non avendovi alcuna influenza la grandezza dell'unità cui si riferiscono le cifre corrispondenti.

15. Nelle operazioni de' numeri è importantissimo l'adottare tutti quei modi atti a renderle più brevi e meno soggette ad errori; giacchè non si arriva che con lungo esercizio ad eseguirle con celerità e sicurezza. Convien dunque: 1° per facilità scrivere i numeri l'uno sotto l'altro in guisa che le unità del medesimo ordine si corrispondano in colonne verticali; 2° per fare il riporto delle diecine che somministra ciascuna somma parziale, conviene cominciar l'operazio- dall'ordine inferiore, e andar dalla destra verso la sinistra; 3° e per evitare gli errori che potrebbero nascere da dimenticanza, cominciar l'addizione di ogni colonna dal numero che si riporta dalla somma precedente.

La somma si separa da' numeri dati per mezzo di una linea.

Ecco degli esempi.

```
 275338          7540832
  25742              573
 558329           296347
   5040           453825
 237281          6930750
-------          4003276
1101730         --------
                19225603
```

§ II. *Della Sottrazione.*

16. La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione. Nell'addizione si cerca di comporre un numero per mezzo delle sue parti, che son date, nella sottrazione si ha per oggetto di scomporre un numero in due parti delle quali una è data. Così le due parti 5 e 3 per mezzo dell'addizione compongono il numero 8. Ma se è dato 8 e una delle sue parti 5, la sottrazione ha per oggetto di trovar l'altra parte 3, che unita al 5 lo riproduca.

17. Il modo più semplice di eseguir questa operazione consiste nel toglier dal numero 8 successivamente tante unità quante ne sono in 5. In effetti 8 meno 1 fa 7, 7 meno 1 fa 6, ec., e dopo cinque operazioni si perviene al numero 3. Si può anche far la sottrazione, aggiungendo al numero più piccolo tante unità quante ne bisognano per raggiungere il più grande. Così si vede che dal 3 per salire al numero 8 bisogna aggiunger 3 unità.

Basta però il più breve esercizio per eseguir tali sottrazioni a mente; sicchè si terrà come cosa nota, che 9 meno 5 fa 4, che 13 meno 4 fa 9, ec.

Riguardata la sottrazione sotto il primo punto di vista, il risultamento dell'operazione si chiama *resto*, in quanto che esprime ciò che rimane dopo aver tolto dal numero più grande tante unità quante se ne contengono nell'altro. Perciò si dice che da 8 tolto 5 il resto è 3. Operando nel secondo modo si viene a conoscere di quanto un numero supera l'altro, e allora il risultamento si chiama *eccesso*; perciò si dirà che 3 è l'eccesso di 8 sopra 5. Se si trattasse di paragonare due numeri disuguali, per conoscere, indipendentemente dalla loro grandezza, quanta è la loro ineguaglianza, bisogna evidentemente o scendere dal numero superiore all'inferiore, o dall'inferiore salire al superiore, e per conseguenza eseguire una sottrazione; in questo caso il risultamento della operazione prende il nome di *differenza*. La sottrazione ha dunque per oggetto: di togliere un numero da un altro, di conoscer di quanto un numero supera un altro, di quanto un numero differisce da un altro. Perciò le parole *resto*, *eccesso*, *differenza*, quantunque applicate al risultamento di una medesima operazione, si riferiscono al diverso modo con cui si riguarda la scomposizione di un numero in due parti delle quali una è data; imperocchè l'oggetto unico che li abbraccia tutti e tre, riducesi a trovare un numero che sommato col più piccolo riproduca il più grande.

18. Si è già detto che quando il numero da sottrarsi è di una sola cifra, l'operazione non ha bisogno di regole e si fa facilmente a memoria.

Se poi tutti due i numeri son composti di più cifre, si tratterà di operar separatamente sopra ciascun ordine di unità, cioè sottrarre le unità dalle unità, le diecine dalle diecine, ec. Scritti perciò, conformemente all'addizione, i numeri l'uno sotto l'altro, si opererà dalla destra verso la sinistra. Do-

$$\begin{array}{r} 7548 \\ 2327 \\ \hline 5221 \end{array}$$

vendo per es. sottrarre 2327 da 7548, si dirà: *da* 8 *tolto* 7 *resta* 1, *da* 4 *tolto* 2 *resta* 2, *da* 5 *tolto* 3 *resta* 2, *da* 7 *tolto* 2 *resta* 5, e si avrà il resto 5221. È inoltre evidente che togliendo da 7548 le diverse parti di cui è composto il numero 2337, si viene a toglier l'intero numero.

Per comodità di operare suol mettersi il numero più grande sopra e il più piccolo sotto; il che fa intendere il significato delle parole *numero superiore e inferiore*, di cui si farà uso in seguito. Ma il modo di scrivere i numeri ha solamente per oggetto, come nell'addizione, il render più facile l'operazione.

Il *resto* si separa da' numeri dati per mezzo di una linea.

19. Può avvenire però che qualche cifra del numero superiore si trovi minore della cifra corrispondente del numero inferiore, come si vede nell'esempio notato a fianco. In fatti da 3 non si può togliere 8, nè da 2 toglier 3, ec. Si supera questa difficoltà staccando un'unità dalla cifra a sinistra, e questa, convertita in dieci unità dell'ordine inferiore, si unirà alle unità dell'ordine inferiore, su cui si sta operando; passando poi alla colonna seguente, si conterà per un'unità di meno la cifra del numero superiore. Tutto ciò riducesi ad aggiungere una diecina alla cifra su cui si sta operando e toglier un'unità dalla cifra seguente. Perciò si dirà: da 13 tolto 8 resta 5, da 11 tolto 3 resta 8, da 17 tolto 9 resta 8, da 6 tolto 5 resta 1. E si vede che per poter eseguir la sottrazione si è scomposto il numero 7823 in un numero di unità, diecine, centinaja, migliaja, tali che ciascun ordine di esse sia maggiore delle corrispondenti nel numero 5938, siccome si vede in margine. Questa scomposizione, che riuscirebbe imbarazzante se dovesse eseguirsi da principio, riesce facilissima quando si esegue a misura che se ne presenta il bisogno.

```
7823
5938
----
1885
```

```
6
 17
  11
   13
----
7823
```

Se nel luogo ove deve staccarsi un'unità per unirla alla cifra dell'ordine inferiore, si trovasse il zero, si passerà alla cifra seguente; e se questa è pur zero, all'altra cifra; e così si andrà innanzi verso la sinistra, finchè si perverrà ad una cifra significativa che somministra l'unità richiesta; allora la cifra su cui si sta operando si troverà aumentata di 10 unità, gli zeri che seguono varranno per 9, e la prima cifra significativa si dovrà intender diminuita di un'unità. Nell'esempio qui posto si dirà: da 13 tolto 6 resta 7, da 9 tolto 4 resta 5, da 9 tolto 7 resta 2, da 12 tolto 5 resta 7, da 4 tolto 2 resta 2. La scomposizione del numero superiore è quella che si vede a lato.

```
53003
25746
-----
27257
```

```
4
12
  99
   13
-----
53003
```

Segue da ciò, che se il numero superiore è terminato da molti zeri, il primo zero varrà 10, e tutti gli altri 9; come si vede nell'annesso esempio. La qual cosa diviene evidente, osservando in (A) la scomposizione del numero 3700000, necessaria per far che la sottrazione si possa eseguir separatamente sopra ciascun ordine di unità.

```
3700000
2943274
-------
 756726
```

```
   (A)
   36
    9999
      10
-------
3700000
```

20. Dalla natura stessa della sottrazione, risulta che se il numero superiore si aumenta o diminuisce di alcune unità, anche il resto sarà aumentato o diminuito di altrettante unità, e se si aumenta o diminuisce il numero inferiore di alcune unità, il resto sarà diminuito o aumentato dello stesso numero. Da ciò si ricava: 1° che tanto è aumentare di un certo numero di unità il numero superiore quanto diminuire il numero inferiore; cioè che trattandosi di aggiungere o togliere alcune unità da uno de' numeri dati, trasportando l'operazione dall'uno dei numeri all'altro, per produrre lo stesso effetto sul resto bisogna far l'operazione contraria; 2° che se ai due numeri dati si aggiunge o toglie lo stesso numero di unità, il resto rimane lo stesso.

La prima delle dette conseguenze permette di aggiunger alla cifra del numero inferiore l'unità che si dovrebbe togliere dalla cifra corrispondente del numero superiore. Si farà allora la sottrazione scrivendo per resto ciò che manca al numero inferiore per arrivare al numero superiore, e quando questo sorpassa 9 si aggiungerà un'unità alla cifra seguente del numero inferiore. Nell'esempio posto a lato si dirà: *da* 7 *a* 12 *è* 5 e si scrive il 5; 6 *più* 1 *fanno* 7, *a* 12 *è* 5, e si scrive il 5; 5 *più* 1 *fanno* 6, *a* 14 *è* 8, e si scrive l'8, ec.

7422
4567
2855

Quest'ultima maniera di far la sottrazione è da preferirsi tanto per la sua facilità, quanto perchè trova il suo uso nella divisione (§.IV).

La seconda conseguenza fa acquistare un'idea esatta della *differenza*, la quale resta invariata quando i due numeri crescono o diminuiscono della stessa quantità, e che perciò dipende non dalla grandezza assoluta de' numeri dati, ma dalla loro ineguaglianza.

Ecco alcuni esempi.

3750923	545200	7345638
2864756	296754	6644763
886167	248466	700875

§. III. Della Moltiplicazione.

21. La *moltiplicazione* è un'operazione che ha per oggetto di comporre un numero per mezzo della ripetizione di un numero dato. È dessa un'estensione del modo di comporre i numeri per mezzo dell'aggiunta o ripetizione dell'unità (n° 5). Per es. aggiungendo il numero 3 a sè stesso si forma 6, e a questo aggiungendo 3 si forma 9, e aggiungendo nuovamente 3 si forma 12, e così di seguito. Questo è ciò che chiamasi moltiplicare il numero 3. Si dice poi con particolarità raddoppiare, triplicare, quadruplicare un numero, quando si ripete o due o tre o quattro volte. I numeri 6, 9, 12, ec. si chiamano i *moltiplici* di 3.

Due soli numeri sono necessari per la moltiplicazione: uno è il numero che dev'esser ripetuto e che chiamasi *moltiplicando*: l'altro che chiamasi *moltiplicatore* indica, col numero delle unità che contiene, quante volte il moltiplicando dev'esser ripetuto. Il risulta-

mento dell'operazione dicesi *prodotto*; i due numeri dati si chiamano i *fattori* del prodotto.

Poichè si tratta di ripeter sempre lo stesso numero, si potrebbe questa operazione eseguir per mezzo dell'addizione. In effetti se il numero 16 si dovesse quadruplicare ossia moltiplicare per 4, basterebbe far l'addizione di quattro numeri eguali a 16, e la somma 64 esprimerebbe il prodotto cercato. Ciò permette di riguardar la moltiplicazione come un caso particolare dell'addizione, cioè come l'addizione di più numeri eguali.

16
16
16
16
—
64

Non si potrebbe però far uso dell'addizione che quando un numero dev'esser ripetuto poche volte; in caso contrario l'operazione diverrebbe estremamente lunga. Ciò ha dato luogo a cercare un metodo particolare per eseguirla in tutti i casi con la massima facilità e brevità.

22. Allorchè i numeri da moltiplicarsi sono di una sola cifra, non vi sono regole per trovarne il prodotto. I prodotti de' primi nove numeri si formeranno con l'aggiunta successiva del numero, nel modo indicato pel numero 3 (n° 21). E siccome questi prodotti sono necessari per poter eseguire la moltiplicazione de' numeri composti di più cifre, è necessario mandarli a memoria, giovandosi della seguente Tavola, che dicesi *Pitagorica*, perchè se ne attribuisce l'invenzione a Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La prima linea si forma aggiungendo sempre l'unità a sè stessa fino al numero 9. La seconda linea si forma aggiungendo successivamente il 2; la terza il 3, ec. Perciò la prima linea conterrà i numeri naturali da 1 fino a 9, la seconda i moltiplici di 2, la terza quelli di 3, ec.

Volendo per es. il prodotto di 7 per 5, si cercherà nella linea che contiene i moltiplici di 5 (che è la quinta), quello che corrisponde al 7 nella prima linea orizzontale; il che riviene a cercare il moltiplicando nella prima linea orizzontale e il moltiplicatore nella prima linea verticale. Il numero, che appartiene così alla linea verticale del primo numero come alla orizzontale del secondo darà il prodotto richiesto. Cercando nel modo indicato, si troverà 35 per prodotto di 7 per 5.

23. Guardando la tavola di Pitagora si riconoscerà che le linee verticali corrispondenti ai numeri 1, 2, 3, ec. sono identiche alle orizzontali corrispondenti agli stessi numeri. Da ciò risulta che il prodotto di 7 per 5 è lo stesso che quello di 5 per 7; vale a dire che, qualunque di questi numeri si consideri per moltiplicando, il prodotto è sempre lo stesso. E siccome la tavola medesima può estendersi quanto si vuole, si può con certezza dedurre che la medesima proprietà ha luogo per tutti i numeri possibili. Ma per dimostrarlo direttamente, si supponga per es. doversi moltiplicare 5 per 3; si scriva in una linea 5 volte l'unità e poi si scrivano tre di queste linee; si troveranno così scritte 15 unità. Or se il numero delle unità si conta per linee orizzontali, si avranno 5 unità ripetute tre volte, e se si conta per colonne verticali si avranno 3 unità ripetute 5 volte. Ma in amendue i casi il numero delle unità è lo stesso; dunque 5 moltiplicato per 3 è uguale a 3 moltiplicato per 5. Il ragionamento di cui si è fatto uso per dimostrar questa verità essendo indipendente da' numeri 3 e 5 presi ad esempio, ne segue, che nella moltiplicazione di due numeri il prodotto non varia con qualunque ordine si prendano i fattori.

1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1

24. Quando il moltiplicando è di più cifre e il moltiplicatore è di una sola cifra, si tratterà di ripeter le sue unità, diecine, centinaja, ec. tante volte, per quante sono le unità del moltiplicatore; ossia, si tratterà di eseguir l'operazione sopra ciascun ordine di unità e poi riunire i risultamenti. Suppongasi che si debba moltiplicare 367 per 3; non bisognerà che ripeter 3 volte le 7 unità, le 5 diecine e le 3 centinaja, e poi riunire i risultamenti ottenuti. In effetti è questo quello che si farebbe se si sommasse 357 tre volte con sè stesso. Basta dunque, per eseguir questa operazione, fare i prodotti di ciascuna cifra del moltiplicando per il moltiplicatore, di scriver le unità di ogni prodotto parziale, e riportar le diecine al prodotto parziale della cifra che segue, siccome si fa nell'addizione rispetto alle somme parziali. Così nell'esem. posto al lato si dirà 3 per 7 fa 21, si scrive l'1 e le 2 diecine si ritengono per unirle al prodotto seguente; poi 3 per 5 fa 15 e 2 che si riportano, 17, si scrive il 7 e si ritiene l'1; 3 per 3 fa 9 e 1 che si riporta, 10; e siccome non vi sono più cifre nel moltiplicando, si scrive il 10 interamente.

$$\begin{array}{r} 357 \\ 3 \\ \hline 1071 \end{array}$$

È chiaro dunque il metodo da tenersi, allorchè il moltiplicando è

di più cifre e il moltiplicatore è di una sola cifra. Il prodotto totale, quantunque ottenuto con una sola operazione, è composto di tanti prodotti parziali per quante sono le cifre del moltiplicando.

25. Segue da ciò, che le cifre del prodotto sono sempre della medesima specie di quelle del moltiplicando. Se dunque il moltiplicando è seguito da uno o più zeri, si può durante l'operazione far astrazione dagli zeri, che poi si aggiungeranno in egual numero al prodotto. Nell'esempio posto in margine, il prodotto di 759000 per 7, si fa, facendo quello di 759 per 7; e poi a questo prodotto, per far che rappresenti migliaja, si aggiungeranno tre zeri a destra.

$$\begin{array}{r} 759000 \\ 7 \\ \hline 5313000 \end{array}$$

26. Prima di passare al caso in cui il moltiplicatore contiene più cifre, convien dimostrare alcune importanti proposizioni.

I. *Si moltiplica un numero per 10 aggiungendo un zero alla sua destra.*

In effetti, se un numero si moltiplica per 6, per 7, ec., si vien a render sei, sette, ec. volte più grande. Moltiplicare perciò un numero per 10 significa renderlo dieci volte più grande. Ma secondo il sistema di numerazione ogni cifra acquista un valore dieci volte più grande passando di un posto dalla destra verso la sinistra (n°7) perciò si moltiplica un numero per 10 facendo avanzare di un posto tutte le cifre verso la sinistra, ossia aggiungendo un zero nella destra. Si vede ancora che per moltiplicarlo per 100, per 1000, ec. basterà aggiungere due zeri, o tre, ec.

II. *Se si moltiplica un numero per un altro, e poi il prodotto per un altro numero, e così di seguito, egli è come se il primo numero si fosse moltiplicato immediatamente per lo prodotto di tutti i moltiplicatori.*

Sia da moltiplicarsi 358 per 4: si ha per prodotto 1432. Or se si moltiplica 358 per 12 che è il triplo di 4, il prodotto deve essere uguale al triplo di 1432. In effetti essendo 12 uguale a 4 più 4 più 4, il prodotto totale deve'essere uguale alla somma de' tre prodotti parziali formati da 358 per ciascuna parte del moltiplicatore. I quali essendo tutti e tre uguali a 1432, il prodotto totale sarà uguale a 1432 moltiplicato per 3.

Il ragionamento stesso è applicabile ad un maggior numero di moltiplicatori.

III. *Il prodotto di più fattori non varia, secondo qualunque ordine si moltiplicano i fattori.*

In effetti sia da moltiplicarsi 7 per 3 per 5. Si potrà moltiplicare 7 prima per 3 e poi per 5, o pure 7 per 15, si avrà lo stesso prodotto (II.). Ma 15 risultando dal prodotto de' due fattori 3 e 5, si potrà fare, o 3 moltiplicato per 5, o 5 moltiplicato per 3 (n° 23); perciò 7 moltiplicato per 15 potrà risultare o da 7 moltiplicato per 3 e poi per 5, o da 7 moltiplicato per 5 e poi per 3. Sarà dunque il prodotto 7 per 3 per 5 eguale a quello di 7 per 5 per 3. Ma 7 per 3 è lo stesso che 3 per 7, dunque il prodotto stesso sarà eguale

a quello di 3 per 7 per 5. Così si continuerebbe dando a' tre fattori tutte le situazioni possibili. La stessa dimostrazione ha luogo per un numero di fattori maggiore di tre.

27. Se il moltiplicatore è composto di una sola cifra significativa seguita da zeri, si farà la moltiplicazione come se gli zeri non vi fossero, e poi se ne aggiungerà un egual numero al prodotto. Imperocchè essendo 400 eguale a 4 moltiplicato per 100, si moltiplica un numero per 400, moltiplicandolo prima per 4 e poi il prodotto ottenuto per 100 (n° prec.). Parimente si moltiplica per 3000 moltiplicando per 3 e aggiungendo tre zeri al prodotto, per 70 moltiplicando per 7 e aggiungendo un zero al prodotto.

Si debba ora moltiplicare 3578 per 486. Ciò corrisponde a ripeter 3578 6 volte più 80 volte più 400 volte, o in altri termini a moltiplicarlo per 6 per 80 e per 400, e poi a riunire questi prodotti parziali. Ma per moltiplicare per 80 basta moltiplicare per 8 e situare la prima cifca del prodotto al posto delle diecine; per moltiplicare per 400 basta moltiplicare per 4 e scrivere la prima cifra al posto delle centinaja; perciò scritti l'uno sotto l'altro i prodotti parziali, coll'avvertenza di situar la prima cifra di ognuno nel posto stesso che occupa la prima cifra del moltiplicatore, la somma di questi prodotti parziali darà il prodotto totale.

```
   3578
    486
-------
  21468
 28624
14312
-------
1738908
```

Da ciò risulta che la moltiplicazione de' numeri composti non richiede che la conoscenza de' prodotti de' numeri di una sola cifra, ossia di quelli contenuti nella tavola di Pitagora. È dunque importantissimo imprimerli bene nella memoria.

28. Ecco nondimeno alcune osservazioni da tenersi presenti nell'intraprender l'operazione.

1° Se fra le cifre del moltiplicatore vi è qualche zero, si passerà alla cifra seguente; ma bisogna mettere attenzione nel situare la prima cifra del prodotto parziale, la quale deve sempre corrispondere al posto che ha nel moltiplicatore, come si vede in (A).

```
        (A)
      573428
      200402
     -------
     1146856
   2293712
 1146856
------------
114916118056
```

2° Se il moltiplicatore è terminato da' zeri, per quel che si è detto (n° prec.) si farà l'operazione come se gli zeri non vi fossero, e poi si aggiungeranno in egual numero al prodotto. Lo stesso si è detto doversi fare riguardo al moltiplicando (n° 25); perciò quando i due fattori son terminati da zeri, si farà la moltiplicazione senza avervi considerazione, e poi al prodotto se ne aggiungeranno tanti quanti ne contengono a destra i due fattori. L'annesso esempio fa conoscer come bisogna regolarsi.

```
    375400
     48000
-----------
  30032
 15016
-----------
18019200000
```

Esempi di moltiplicazione.

375832	607360
759	847
3382488	425152
1879160	242944
2630824	485888
285256488	514433920

29. Si può, prima di eseguir la moltiplicazione, conoscer quante cifre deve avere il prodotto. Infatti se il moltiplicatore è di una sola cifra, ogni cifra del moltiplicando dà una cifra nel prodotto; solamente l'ultimo prodotto può esser di una cifra o di due. In conseguenza il prodotto avrà, o un numero di cifre eguale a quelle del moltiplicando, o una di più. Basta osservare la prima cifra (a sinistra) del moltiplicando e tener conto del riporto del prodotto precedente per decidere quale de' due casi abbia luogo.

Allorchè il moltiplicatore è di più cifre, si osserverà il prodotto che risulta dall'ultima cifra del moltiplicatore, il quale darà tante cifre o una di più di quelle del moltiplicando. Ora a questo prodotto bisogna aggiunger tanti zeri quante sono le cifre rimanenti del moltiplicatore. Perciò in ogni caso le cifre del prodotto saranno o quante quelle de' due fattori o una di meno.

Potendosi invertire l'ordine de' fattori, senza che venga ad alterarsi il prodotto, gioverà de' due fattori prender per moltiplicatore quello che ha meno cifre. Si farà allora un minor numero di prodotti parziali; e siccome ogni prodotto parziale può contenere una cifra di più del moltiplicando, si scriveranno meno cifre, e l'operazione riuscirà più breve.

§. IV. *Della divisione.*

30. La *divisione* è l' operazione inversa della moltiplicazione, come la sottrazione è dell'addizione. Dati due numeri, per mezzo della moltiplicazione se ne forma il prodotto; ma se in vece fosse dato il prodotto e uno de' fattori, l'operazione che serve a trovar l'altro fattore, chiamasi *divisione.* Sia dato per es. il numero 64 come prodotto, ed il 16 come fattore di 64; la divisione ha per oggetto di trovare l'altro fattore 4, il quale moltiplicato per 16 riproduca 64.

Ha poi ricevuto il nome di divisione, perchè serve appunto a dividere un numero in parti eguali. Di fatti se si volesse, o sapere di quante parti eguali a 16 è composto 64, o pure dividere il 64 in 16 parti eguali, bisognerebbe considerare 64 come prodotto e 16 come uno de' fattori; e il fattore 4 rinvenuto indicherebbe, nel primo caso che 64 è composto di 4 parti eguali a 16, e nel secondo che è composto di 16 parti uguali a 4.

Il numero che deve dividersi si chiama *dividendo*; quello pel quale si deve questo dividere, si dice *divisore*; e il fattore che si ottiene, *quoziente.*

Siccome coll'addizione si potrebbe eseguire una moltiplicazione, basterebbe la sottrazione per effettuar la divisione. Di fatto il 64 è composto del 16 ripetuto tante volte per quante unità si trovano nel fattore che si cerca. Se dunque da 64 si toglie il 16 quante volte si può, osservando che dopo quattro sottrazioni non vi è più resto si conchiuderà che bisogna ripeter il 16 quattro volte per ottenere il 64, e che quindi il fattore richiesto è 4. La sottrazione ripetuta della s essa quantità, sebbene impraticabile quando i numeri sono molto alti, fa conoscere che il quoziente indica quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.

Qualunque sia il punto di vista sotto il quale si riguarda questa operazione, il suo oggetto è sempre la scomposizione di un numero in due fattori de' quali uno è dato; e riducesi a trovare un numero che moltiplicato per lo divisore riproduca il dividendo.

31. Prima di dar le regole per far la divisione conviene osservare che il quoziente di un numero diviso per 2 si dice esserne la *metà*; diviso per 3, per 4, per 5, ec. si dice la sua parte *terza*, *quarta*, *quinta*, ec.; diviso per 12, per 13, ec. si dice la sua parte *dodicesima*, *tredicesima* ec. I quozienti interi di un numero diviso per 2, per 3, per 4, per 5, ec. si chiamano *summultiplici* del numero dato. I summultiplici di un numero ne sono una parte *aliquota*.

Dippiù, dividere un numero per 6, per 7, ec. significa renderlo sei, sette, ec. volte minore. Se dunque si cancella un zero alla destra di un numero, ogni cifra, e quindi il numero stesso, acquistando un valore dieci volte minore, sarà diviso per 10. Parimente cancellando due, tre, ec. zeri alla destra, il numero sarà diviso per 100, per 1000, ec.

32. Se il divisore è di una sola cifra e il dividendo di una o due cifre, delle quali quella delle diecine è minore del divisore, il quoziente dev'esser necessariamente di una sola cifra. Sarà facile trovarlo conoscendo i prodotti de' primi nove numeri; in caso diverso si ricorrerà alla Tavola di Pitagora (n° 22). Se si vuole per es. il quoziente di 35 diviso per 7, si cercherà 7 nella prima linea orizzontale, e discendendo verticalmente fino a che si trovi 35, si vedrà che il primo numero della linea orizzontale in cui sta il 35 è 5; e questo è il quoziente richiesto.

Poichè i moltiplici di un numero si possono formare aggiungendo sempre lo stesso numero alla somma ottenuta, ne segue che da un multiplice all'altro successivo vi sarà l'intervallo di tante unità per quanto è il numero stesso meno una. Guardando per es. nella tavola di Pitagora i moltiplici di 6, si vedrà che essi sono 6, 12, 18, ec., e che dall'uno all'altro vi sono altri cinque numeri intermedi. Se dunque si dovesse dividere 38 per 6, non trovandosi 38 fra i moltiplici di 6, la divisione non può effettuarsi esattamente. La quistione allora riducesi a trovare il quoziente del più gran multiplice di 6 contenuto in 38.

33. Per passare al caso in cui il dividendo abbia più di due cifre e il divisore sia di una cifra sola, si supponga che si voglia dividere 693 per 3. Si tratterà di trovare un numero che moltiplicato per 3 riproduca le unità, diecine e centinaja di 693. Or ciascuno di questi numeri essendo separatamente divisibile per 3, si trova subito che il quoziente è 231.

Ma se dovesse dividersi 2492 per 7, non si potrebbe seguire lo stesso metodo, perchè niuna delle cifre del dividendo è separatamente divisibile per 7. Si osserverà in primo luogo che il quoziente richiesto non può aver migliaja, giacchè se avesse solamente 1 migliajo, questo moltiplicato per 7 darebbe 7 migliaja, mentre il dividendo ne contiene 2. Il quoziente avrà dunque centinaja, diecine e unità. Or le centinaja del quoziente dovendo esser tali che moltiplicate per 7 diano un prodotto non maggiore delle 24 centinaja del dividendo, si troverà il maggior multiplo di 7 contenuto in 24 centinaja che è 21, il cui quoziente è 3, e queste saranno le centinaja del quoziente. Tolte 21 centinaja da 24, si avrà per resto 3 centinaja, che, convertite in diecine e unite alle 9 diecine del numero proposto, daranno 39 diecine da dividersi per 7. Si farà la stessa operazione, e si troverà la cifra 5 per le diecine del quoziente. Da 39 tolte 35, prodotto di 7 per 5, si avrà per resto 4 diecine; convertite in 40 unità insieme con le 2 unità del numero proposto daranno 42 unità da dividersi per 7; il quoziente è 6. Si avrà quindi il quoziente totale 356; e siccome togliendo dall'ultimo dividendo 42 il prodotto di 7 per 6 non vi è resto, la divisione si fa esattamente.

```
2492 | 7
21   |----
--   | 356
 39
 35
 --
  42
  42
  --
   0
```

Si vede che questa operazione si può riportare alla precedente considerando il numero 2492 come scomposto in 21 centinaja, 35 diecine e 42 unità, e ciascuno di questi numeri è divisibile separatamente per 7, appunto come nella divisione di 693 per 3 riportata più sopra. I numeri 24, 39 e 42, su i quali deve successivamente eseguirsi la divisione, si chiamano dividendi parziali.

```
21
 35
  42
----
2492
```

34. Allorchè il divisore è di una sola cifra, i dividendi parziali non possono essere che di una o di due cifre, e sarà facile in conseguenza fare le sottrazioni senza scrivere i prodotti del divisore per le rispettive cifre del quoziente. Nell'esempio quì posto a lato si dirà; 6 *in 44 entra 7 volte*, e si scrive il 7; 6 *per* 7 *fa* 42 *a* 44 *è* 2, si scrive il 2 sotto il 44 e si cala il 3. Di poi, scritta la seconda cifra 3 del quoziente, si dirà; 6 *per* 3 *fa* 18, *a* 23 *è* 5, si scrive il 5 e si cala il 3 per avere il terzo dividendo parziale. Così si continuerà.

```
443364 | 6
 23    |------
  53   | 73894
   56  |
    24 |
     0 |
```

Non solo in questo caso si può far uso dell'esposto compendio, ma dopo un breve esercizio si potrà scrivere immediatamente il quoziente sotto il dividendo, senza scrivere i dividendi parziali. Nel-

l'esposto esempio si dirà; 6 *in* 44 *entra* 7 *volte*, e si scrive il 7; resta 2 che unito al 3 fa 23; 6 *in* 23 *entra* 3, si scrive il 3 e resta 5 che unito al 3 fa 53; 6 in 53 entra 8, si scrive 8 e resta 5 che unito al 6 fa 56; 4 *in* 56 *entra* 9, si scrive il 9 e resta 2 che unito al 4 fa 24; 6 *in* 24 *entra* 4; e siccome non vi è resto, l'operazione è finita.

443364	6
73894	

È utilissimo l'esercitarsi a fare mentalmente queste specie di scomposizioni.

35. Finalmente se anche il divisore è di più cifre, l'andamento dell'operazione è lo stesso; solamente i dividendi parziali dovranno aver tante cifre quante ne ha il divisore o una di più. Si debba per es. dividere 574382 per 768. È chiaro che per primo dividendo parziale deve prendersi necessariamente 5743, giacchè le prime tre cifre danno 574 che è minore di 768. Per conoscere quante volte il numero 5743 contiene il divisore, si può esaminare quante volte la prima cifra 7 del divisore è contenuta in 57. Si trova che vi è contenuta 8 volte; si farà il prodotto di 768 per 8, e siccome questo prodotto è 6144 maggiore di 5743, la cifra 8 è troppo grande. Si sperimenta il 7 e fatta la moltiplicazione di 768 per 7 si trova 5376 che è minore di 5743; per cui la cifra 7 è esatta. Scritta questa cifra al quoziente, e il prodotto di 768 per 7 sottratto dal dividendo parziale 5743, si avrà il resto 367. Si calerà la cifra 8 del dividendo, e si avrà un secondo dividendo parziale 3678, sul quale si opererà come sul primo. Si trova per seconda cifra del quoziente 4 e per secondo resto 606. Calata la cifra 2, si avrà il terzo dividendo parziale 6062, che dà per terza cifra del quoziente 7 e per resto 686. Si vede da questo esempio, che l'operazione dev'esser condotta come nel caso in cui il divisore è di una sola cifra.

Dividendo.	5743'8'2'	768	Divisore.
	5376	747	Quoziente.
	367 8'		
2º divid. parz. . .	307 2		
	60 6 2'		
3º divid. parz. . .	53 7 6		
Resto.	6 8 6		

Per evitare gli errori si segnano con un accento le cifre che si calano.

36. La sola difficoltà sta nel determinare con precisione quante volte il dividendo contiene il divisore. Sia per es. da dividersi 34811 per 5973. Secondo la regola assegnata si deve prender 8 per cifra del quoziente. Or affinchè 8 sia cifra esatta è necessario che 34811 contenga i diversi prodotti parziali che risultano moltiplicando le cifre del divisore per 8, i quali prodotti parziali sono dello stesso ordine di quello del divisore. Si farà dunque 4 in 34 entra 8 volte; sottratto il prodotto di 4 per 8, che è 32 migliaja, da 34 migliaja resta 2811 che dovrebbe contenere i prodotti di 8 per 973. Ma il 9 non entra in 28 otto volte; perciò la cifra 8 è troppo grande. Si osservi che in questa operazione bastava unire il

resto 2 alla cifra seguente e formar 28 per esaminar se 28 contiene 8 volte la seconda cifra 9 del divisore. Si passa a sperimentare il 7. In effetti il 4 fatto entrare in 34 sette volte dà per resto 6 che unito a 8 dà 68. Il 68 contiene 7 volte il 9 (seconda cifra del divisore) e dà per resto 5, che unito alla cifra seguente dà 51. Il 51 contiene pure 7 volte il 7 e dà per resto 2 che unito a 1 dà 21 , numero che contiene pure il 3 sette volte. Da ciò si conchiude che la cifra 7 è esatta. Si vede che con questa operazione fatta mentalmente si viene a scomporre il numero 34811 in 28 migliaja , 63 centinaja , 49 diecine e 21 unità, ciascuna delle quali divisa rispettivamente per le cifre 4 , 9 , 7 e 3 del divisore dà per quoziente 7. Questi sono in effetti i diversi prodotti parziali che si ottengono , moltiplicando 5973 per 7.

```
 28
 63
 49
 21
-----
34811
```

È raro che si debba spingere il tentativo fino all'ultima cifra , giacchè se si arriva a un resto che unito alla cifra seguente non contiene più lo stesso numero di volte la cifra corrispondente del divisore , la cifra del quoziente è troppo grande. Se poi si perviene a un resto almeno eguale alla cifra stabilita nel quoziente , è inutile proseguire il saggio , e la cifra è giusta. Nell'esempio qui annesso si ha per primo dividendo parziale 27743. Or il 4 in 27 entra 6 volte e resta 3 che unito al 7 fa 37 ; il 9 in 37 non entra 6 volte per cui 6 è troppo grande. Si prende 5. Siccome 4 per 5 fa 20 , sottratto da 27 , dà per resto 7 che unito al 7 dà 77. Il 9 in 77 entra 5 ; ma il resto essendo assai maggiore di 5 , è inutile seguir più oltre. Il secondo dividendo parziale è 28782 , che differendo poco dal primo , fa conoscere immediatamente che la cifra del quoziente è pure 5. Il terzo dividendo parziale è 39179. Or 4 in 39 entra 9 volte e resta 3 , che unito all'1 dà 31. Siccome 9 in 31 non entra 9 volte , si prenderà 8 per cifra del quoziente. Il 4 in 39 fatto entrare 8 volte dà per resto 7 che unito all'1 dà 71. Il 9 in 71 non si contiene 8 volte ; per ciò si prenderà 7. Essendo 7 per 4 eguale a 28 , sottratto da 39 dà per resto 11 che è maggiore di 7 , per cui la cifra 7 è buona.

```
2774329 | 4973
24865   |-----
-----   | 557
 28782  |
 24865
 -----
  39179
  34811
  -----
   4368
```

39. La divisione in generale riuscirà più compendiosa , trovando i resti senza scrivere i prodotti del divisore per ciascuna cifra del quoziente. Dovendo dividere 5425932 per 7384 , si disporrà l'operazione al solito ; e preso il primo dividendo 54259 si troverà che le cifra del quoziente è 7. Si dirà : 4 *per* 7 *fa* 28 , e siccome la cifra delle unità del dividendo è 9 , si prenderanno due diecine dalla cifra seguente , il che dà 29 ; per cui *da* 28 *a* 29 *è* 1 , e si nota l'1. Bisogna ricordarsi le 2 diecine aggiunte , le quali in vece di toglierle dalla cifra seguente 5 si uniranno al prodotto seguente , siccome si è detto (n° 16). Poi si dirà ; 7 *per* 8 *fa* 56 *e* 2 *che si riportano* 58 , e come la cifra superiore è 5 si aggiungeranno 6 diecine e si farà 65

```
54259'3'2' | 7384
 2571 3    |-----
  356 1 2  | 734
   60 7 6
```

per cui *da* 58 *a* 65 *è* 7. Si scrive il 7 e si tiene a memoria il 6. In seguito 3 *per* 7 *fa* 21 *e* 6 *fanno* 27 , *a* 32 *è* 5. Si nota il 5 e si tiene a memoria il 3. In fine 7 *per* 7 *fa* 49 *e* 3 *fanno* 52 , *a* 54 *è* 2. Si scrive il 2, e si avrà il resto 2571. Calata la cifra seguente, si ha il secondo dividendo parziale 25713. Trovato che la cifra del quoziente è 3, si dirà : 3 *per* 4 *fa* 12 , *a* 13 *è* 1 ; 3 *per* 8 *fa* 24 *e* 1 *fanno* 25 , *a* 31 *è* 6 ; 3 *per* 3 *fa* 9 *e* 3 *fanno* 12 , *a* 17 *è* 5; 3 *per* 7 *fa* 21 *e* 1 *fanno* 22 , *a* 25 *è* 3. Sul terzo dividendo parziale si opererà nel modo stesso.

40. Intorno alla divisione conviene tener presenti le seguenti cose.

1°. Le cifre del quoziente sono dello stesso ordine di quelle de' dividendi parziali; il che può verificarsi in tutti gli esempi precedenti.

2°. Se qualche dividendo parziale non contenesse il divisore, il quoziente non conterrà unità di quell'ordine; perciò si scriverà 0 nel quoziente, e si calerà la cifra seguente.

3°. Ogni quoziente parziale dovendo esser di una sola cifra, non potrà esser maggiore di 9.

4°. Il numero delle cifre del quoziente è sempre uguale al numero delle cifre che si calano più una.

5°. Ogni prodotto parziale deve risultare minore del dividendo parziale. Quando ciò non ha luogo, la cifra scritta nel quoziente è troppo grande e dev'esser diminuita.

6°. Il resto dev'esser minore del divisore. Se risultasse maggiore, converrà aumentare la cifra del quoziente (*).

(*) Se avverrà di scrivere al quoziente una cifra o troppo grande o troppo piccola, il che si avverte dopo fatto il prodotto , non è necessario cancellar l'operazione eseguita e rifar di nuovo il prodotto del divisore per la cifra corretta del quoziente. Il seguente esempio mostrerà chiaramente come bisogna in simili casi regolarsi.

		Divisore / Quoziente	
	16284'9'8'8'6'	5673	
	11346	29606	
2.° divid. parz. . .	4938 9'	87	
	5105 7		
Resto non esatto . .	9833 2		(si scrive 8 in vece di 9 al quoziente).
	567 3		
Resto corr. . . .	400 5		
3.° divid. parz. . .	400 5 8'		(In pratica la cifra che si cala si scrive immediatamente vicino al resto).
	340 3 8		
Resto magg. del divis.	60 2 0		(nel quoziente si scrive 7 in vece di 6).
	56 7 3		
Resto corr. . . .	3 4 7		
4.° divid. parz. . .	3 4 7 8'		
5.° divid. parz. . .	3 4 7 8 6'		(In pratica le due cifre calate 8 e 6 si sarebbero scritte immediatamente a destra del resto 347).
	3 4 0 3 8		
Resto	7 4 8		

37. Se il dividendo e il divisore son terminati da zeri cancellandone in ciascuno un egual numero, il quoziente non è alterato. Perciò il quoziente di 51000 per 600 è uguale a quello di 510 per 6.

In effetti i due zeri soppressi non fanno che cangiare il nome dell'unità, ed è evidente che 510 centinaja divise per 6 centinaja danno lo stesso quoziente che 510 unità divise per 6 unità. Però, se vi è resto, questo esprimerà unità dello stesso ordine dell'ultimo dividendo; perciò volendo il vero resto, bisogna rimettere gli zeri. Così 45000 diviso per 6000 dà lo stesso quoziente che 45 diviso per 6. Ma il resto 3 esprimendo migliaja dev'esser scritto 3000.

Dopo aver ottenuta la prima cifra 2 del quoziente si ha il resto 4938; e calata la cifra seguente 9, si ha il 2° dividendo parziale 49389. Siccome 5 entra in 49 nove volte, si supponga essersi scritto 9 al quoziente. Il prodotto del divisore per 9 è 51057, maggiore del dividendo parziale. La qual circostanza annuncia che la cifra 9 del quoziente dev'esser diminuita almeno di un'unità. In vece di cancellare questo prodotto e scrivervi quello del divisore per 8 (cifra corretta del quoziente), si farà la sottrazione supponendo la prima cifra (a sinistra) del dividendo parziale aumentata di una diecina, cioè si sottrarrà 51057 da 149389, e si avrà il resto 98332; a questo aggiungendo il divisore 5673, e omettendo di scriver l'ultima diecina, si ha 4005 che è appunto il resto esatto, che si sarebbe ottenuto sottraendo dal dividendo parziale il prodotto di 5673 per 8, Infatti siccome il numero 51057 si trova aumentato di 5673, è chiaro che non si cambierebbe il resto se si aumentasse della stessa quantità il numero 49389 (n° 16). Operando nel modo indicato non si fa che invertir l'ordine delle operazioni, giacchè al resto si aggiunge il numero 5683 che conveniva aggiungere a 49389; e cancellando l'ultima diecina si viene a togliere il 100000 che si era da prima aggiunto per render la sottrazione possibile.

Ottenuto il terzo dividendo parziale 40058 si supponga essersi scritta la cifra 6 nel quoziente. Moltiplicando per 6 si ha per prodotto 34038 che sottratto dal dividendo suddetto dà un resto 6020, maggiore del divisore; il che mostra che la cifra del quoziente dev'esser aumentata di un'unità. Ma senza fare il prodotto del divisore per 7, è evidente che basterà sottrarre da 6020 il divisore 5673, e si avrà 347 che è il resto esatto.

CAPO II.

DE' DECIMALI

ART. I.

Natura e proprietà de' decimali.

40. Secondo la legge sulla quale è fondato il sistema di numerazione ogni cifra si riferisce ad un'unità dieci volte più piccola di quella che le sta a sinistra, e dieci volte più grande di quella che le sta a destra; e in generale la grandezza dell'unità cui si riferisce una cifra paragonata a quella cui si rapporta un'altra cifra qualunque ha un valore dieci, cento, mille volte più piccolo secondo che si trova da essa lontano verso la sinistra per uno, due, tre posti, e un valore dieci, cento, mille volte più grande a misura che si trova lontana da essa di uno, due o tre posti verso la destra. E siccome procedendo dalla destra verso la sinistra si può arrivare ad una unità tanto grande quanto si vorrà, non vi sarebbe ragione di fermarsi alle unità semplici allorchè si procede dalla sinistra verso la destra. Dando dunque al sistema di numerazione tutta l'estensione di cui è suscettivo, si stabilirà che una cifra posta a destra delle unità abbia un valore dieci volte più piccolo di quello che avrebbe al posto delle unità; dessa perciò rappresenterà *decimi*. Parimente una cifra a destra de' decimi avrà un valore dieci volte più piccolo di quello che avrebbe al posto de' decimi, cento volte più piccolo di quello che avrebbe al posto delle unità, e rappresenterà *centesimi*; e così di seguito. Per poter intendere il significato di un numero non rimane che a fissare il posto delle unità; per tal oggetto si è convenuto di mettere una virgola dopo le unità. Per es. nel numero 379,4583 la cifra 9 posta a sinistra della virgola rappresenta le unità; del numero a destra della virgola la prima cifra 4 rappresenta decimi, la seconda centesimi, la terza millesimi, e così si continua col dar alle diverse unità la desinenza in *esimi*. Perciò le cifre a sinistra della virgola rappresentano 4 decimi, 5 centesimi, 8 millesimi, 3 diecimillesimi.

Oltre le considerazioni precedenti, bisogna ricordarsi che nel leggere un numero si può cambiar facilmente l'unità, fermandosi a quella cifra che si vorrà. Per es. se il numero 37543 si legge, 37 migliaja e 543 unità, il valore relativo delle unità delle cifre non cambiasi; ma siccome l'unità è la millesima parte del migliajo, per esprimer tutto per mezzo del migliajo, bisognerebbe leggere: 37 migliaja e 543 millesimi di migliajo. Or se effettivamente si volesse prender per unità il migliajo, non si dovrebbe far altro che cambiare il vocabolo, e quindi quel numero diverrebbe 37 unità e 543 millesimi.

Si può dunque con questo sistema portar l'unità a quel grado di grandezza o di picciolezza che si vuole, col solo scriver le cifre l'una accanto dell'altra, o verso la sinistra o verso la destra.

41. Un numero decimale si potrebbe leggere come se fosse un numero intero e dare a tutto il numero la denominazione che compete all'ultima delle cifre decimali; la quale denominazione sarà determinatà dall'unità seguita da tanti zeri per quanti posti occupano le cifre dopo la virgola. Ma l'uso invalso è di leggere prima gl'interi separatamente e poi i decimali. Perciò il numero 54,3739, essendovi quattro cifre decimali, rappresenterà diecimillesimi, e si leggerà 54 interi e 3739 diecimillesimi; ma è evidente che potrebbe leggersi 543 decimi e 739 diecimillesimi, o pure 5437 centesimi e 39 diecimillesimi ec., o in fine 543739 diecimillesimi.

I decimali si scriveranno sotto la dettatura come si scrivono gli altri numeri. Fa d'uopo però porre attenzione alla loro denominazione, affinchè, vedendo quante cifre decimali debbono esservi, si supplisca con gli zeri a quelle che mancano. Così dovendo scrivere 2 interi e 307 milionesimi, siccome un milione ha sei zeri e 307 contiene tre cifre, si aggiungeranno tre zeri a sinistra, e il numero sarà 2,000307. In questo numero mancano i decimi, i centesimi e i millesimi. Similmente il numero 13 interi e 4 diecimillesimi si scriverà 13,0004.

Allorchè mancano le cifre a sinistra della virgola, per far conoscere il posto delle unità, si metterà un zero nel luogo delle unità. Così il numero 0,432 esprime 432 millesimi, e si legge: *zero interi e 432 millesimi.* Quel zero cui segue la virgola determina il posto relativo di ciascuna cifra; per cui si conosce che il 4 sta nel posto de' decimi, il 3 in quello de' centesimi, e il 2 in quello de' millesimi.

42. È chiaro che in un numero che contiene interi con decimali aggiungendo degli zeri o a destra o a sinistra, il suo valore non si altera, perchè niuna delle cifre cambia di posto. In effetti il numero 3,543 è lo stesso che ...0003,543000..., e il numero 59 non differisce da 59,900...

ART. II.

Operazioni su i decimali.

43. Avendo esteso il sistema di numerazione anche per rappresentare parti minori dell' unità, e le regole assegnate per far le operazioni su gl'interi essendo appoggiate al sistema di numerazione, esse converranno ancora al caso in cui i numeri contengono cifre decimali. È necessario nondimeno far alcune osservazioni da tenersi presenti nel caso di cui si tratta.

44. Per l'addizione non altro deesi avvertire, se non che dovendosi far l'addizione sulle unità della medesima grandezza (n° 12), si sommeranno i decimi co' decimi, i centesimi co' centesimi, ec.; perciò si scriveranno in modo i numeri l'un sotto l'altro, che le unità e la virgola sieno in una stessa colonna verticale, e arrivati ai decimi, si farà il riporto come se la virgola non vi fosse.

Ecco degli esempi.

```
33,57           6,003729
 2,58349        1,45
 6,0458         3,7273
15,06296        5,8
--------       ---------
57,20223       16,981029
```

45. Per la sottrazione varrà la stessa regola. Solamente se il numero superiore ha meno cifre decimali dell'altro, s'intenderanno messi degli zeri nel posto delle cifre mancanti, come si vede ne seguenti esempi.

```
3,743        0,0452        13,58
2,0458       0,028976       2,79873
------       --------      --------
1,6972       0,014224      10,78127
```

46. Intorno alla moltiplicazione e alla divisione è necessario esporre alcuni teoremi.

I. Secondo l'idea assegnata alla moltiplicazione, moltiplicare un numero per 2, per 3, per 4, ec. corrisponde a renderlo 2, 3, 4, ec. volte più grande. Ma è evidente che un numero diviene 2, 3, 4 ec. volte più grande col solo riferirlo ad un'unità 2, 3, 4, ec. volte più grande. Dunque tanto è moltiplicare per 7 quanto è lasciare il numero invariato e prendere un'unità 7 volte più grande; e viceversa. Per es. il prodotto di 378 per 5 è 1890; or 378 unità 5 volte più grandi formano la stessa quantità che 1890 unità primitive.

Similmente dividere un numero per 5 vale lo stesso che riferire un numero ad un'unità 5 volte più piccola; per 7, a un'unità sette volte più piccola; e così di seguito.

II. Siccome l'unità cui si riferisce un numero si rende 10, 100, ec. volte più grande o più piccola col trasportare la virgola di uno due, ec. posti verso la destra o verso la sinistra; perciò la moltiplicazione per 10, per 100, per 1000, ec. si esegue facendo avanzar la virgola di un posto o di due o di tre, ec. verso la destra, come la divisione per 10, per 100, per 1000, ec. si fa passando la virgola da destra verso sinistra. Per es. il numero 35,438 che si può leggere 35438 millesimi, riferendolo ad un'unità 10 volte più grande diverra 35438 centesimi, che si scrive 354,38. Si vede inoltre che le cifre, seguendo un cammino contrario a quello che fa la virgola, nel primo caso avanzano verso la sinistra e acquistano perciò un valore

di dieci in dieci volte più grande, e nel secondo passano verso la destra e acquistano perciò un valore di dieci in dieci volte più piccolo. Così se il numero 43,8932 si voglia moltiplicare per 100, si passerà la virgola di due posti verso la destra, e si avrà 4389,32. Se il numero 3,74 si voglia dividere per 1000, si scriverà 0,00374.

III. Siccome il prodotto rappresenta unità dello stesso ordine del moltiplicando, si vede che se si cambia l'unità del moltiplicando, si cambia nel modo stesso quella del prodotto. Ma il cambiare un unità corrisponde a moltiplicare, perciò se il moltiplicando si raddoppia, si avrà un prodotto doppio; se si triplica, il prodotto sarà triplo; e in generale prendendo un moltiplicando multiplo di un altro, si avrà un prodotto egualmente multiplo del primo. Si verifica dunque sul moltiplicando la stessa proprietà che nel n° 26 si è dimostrata sul moltiplicatore, cioè che prendendo un moltiplicatore doppio, triplo, ec. si ha anche un prodotto doppio, triplo, ec. Il che dipende dall'altro principio, che siccome ne' numeri astratti il prodotto è sempre lo stesso, qualunque de' fattori si prenda per moltiplicando (n° 23), la stessa proprietà di cui gode un fattore deve goder l'altro. Inoltre la regola assegnata nella moltiplicazione di cominciare a scrivere ogni prodotto parziale nel luogo dove si trova la prima cifra del moltiplicatore è una conseguenza del principio precedente. Imperocchè il prodotto di 472 per 7 è sempre 2604; ma esso rappresenta unità, diecine, centinaia, ec. secondo che 7 si trova nel posto delle unità, o in quello delle diecine, ec. Per conseguenza il cambiamento di unità nel moltiplicatore (sia che ciò avvenga per moltiplicazione o per spostamento di cifra) porta un egual cambiamento nel prodotto.

Per una ragione contraria se si divide o il moltiplicando o il moltiplicatore per 2, per 3, ec. anche il prodotto sarà diviso per 2 per 3, ec.

IV. Quindi se si moltiplica per un numero qualunque il moltiplicando e per lo stesso numero si divide il moltiplicatore, o viceversa, il prodotto non varia.

V. Siccome nella divisione, il dividendo corrisponde al prodotto e il divisore al moltiplicatore, perciò se il dividendo e il divisore si moltiplicano o si dividono contemporaneamente per un medesimo numero, il quoziente non varia. Questa proprietà era stata dimostrata in particolare pe' numeri 10, 100, ec. nel n° 36.

47. Ciò posto sia per es. da moltiplicarsi 2358,43 per 4,732. Se si sopprime la virgola tanto nel moltiplicando, quanto nel moltiplicatore si viene a moltiplicare il primo numero per 100, il secondo per 1000. E siccome moltiplicando 235843 per 4732 si ottiene un prodotto 100000 volte maggiore, dividendo questo prodotto per 100000 ossia separandone cinque cifre decimali, si avrà il prodotto richiesto. Il che si può dedurre ancora dalla considerazione seguente. Siccome col supprimere le virgole nei fattori si sono cambiate le unità, bisogna nel prodotto ritornare alla vera unità; il che si fa staccando le cifre decimali. Segue da ciò la regola, che *la moltiplica-*

zione de' decimali si fa come se i numeri fossero interi, e poi dal prodotto si staccano tante cifre decimali, quante ve ne ha ne' due fattori.

Si può ancora riguardar questa moltiplicazione sotto un altro aspetto. Siccome il prodotto rappresenta unità dello stesso ordine del moltiplicando, si potrà sopprimere la virgola nel moltiplicatore, e accrescere tante cifre decimali nel moltiplicando, col trasportare la virgola verso la sinistra, per quante ne sono state soppresse nel moltiplicatore; il che facendo, il prodotto non varia (n° 46, IV.). Allora i due numeri proposti diverranno quelli che sono in margine. La virgola nel prodotto occuperà lo stesso posto che ha nel moltiplicando. Volendo parimente il prodotto di 0,06752 per 13,27, si moltiplicherà 0,0006752 per 1327.

```
      2,35843
         4732
  -----------
      4,71686
     70,7529
   1650,901
   9433,72
  -----------
  11160,09076
```

È utile in alcuni casi, specialmente quando vi son decimali, cominciare i prodotti parziali dalla sinistra del moltiplicatore e proceder verso la destra, nel prodotto non vi sarà differenza, solamente la linea che era l'ultima si troverà scritta la prima, la penultima sarà la seconda, ec., come si osserva in margine. Questa maniera di operare ha il vantaggio di dar prima le cifre delle unità dell'ordine più elevato, che molte volte sono le sole che importi conoscere.

```
      2,35843
         4732
  -----------
   9433,72
   1650,901
     70,7529
      4,71686
  -----------
  11160,09076
```

48. Riguardo alla divisione, se il divisore non ha cifre decimali, si farà la divisione al modo ordinario. Solo è da avvertirsi che siccome le cifre del quoziente son dello stesso ordine delle cifre che si calano nel dividendo, appena si cala la prima cifra decimale, si metterà la virgola nel quoziente. Nell'esempio qui annesso, dopo la seconda divisione si ha il resto 33, e bisogna calare la cifra 8 che è la prima decimale. Il dividendo parziale 338 rappresendando decimi si metterà la virgola nel quoziente, affinchè la cifra 6 esprima decimi. Le cifre seguenti si troveranno situate tutte al posto che ad esse compete, secondo l'ordine delle unità che debbono rappresentare.

```
3219,82 | 54
 519    |------
  33 8  | 59,62
   1 42 |
     34 |
```

49. Se poi anche il divisore contiene decimali, siccome il quoziente non si altera se il dividendo e il divisore si moltiplicano per un medesimo numero (n° 44, V.), si sopprimerà la virgola nel divisore, e nel dividendo si trasporterà di tanti posti verso la destra per quante erano le cifre decimali del divisore. Sia per es. da dividersi 3584,2794 per 2,71; questa divisione, facendo quanto si è detto, si ridurrà a quella di 358427,94 per 271. Perciò se le cifre decimali nel dividendo e nel divisore sono eguali, si sopprimerà la virgola in ciascuno; se quelle del divisore sono in maggior numero, si aggiungeranno nel dividendo gli zeri necessari per eguagliar le cifre a destra della virgola, e poi si sopprimerà la virgola; se quelle del

dividendo sono in maggior numero ne rimarrà nel dividendo un numero eguale alla differenza fra le cifre decimali del dividendo e quelle del divisore. Così la divisione di 538,27 per 0,47 si riduce a quella di 53827 per 47; la divisione di 12,4 per 1,2589 si riduce a quella di 124000 per 12589.

È necessario avvertire, conforme a ciò che si disse al n° 38, che se deve tenersi conto del resto, nel caso che siasi cambiata l'unità del dividendo e del divisore, è necessario nel resto ritornare alla primiera unità, ripassando la virgola di tanti posti verso la sinistra di quanti è stata avvanzata nel cominciar la divisione.

50. Poichè a destra di un numero che contiene cifre decimali si possono aggiunger quanti zeri si vogliono senza che il valore del numero si alteri (n° 42), si può la divisione prolungar quanto si vorrà; e in molti casi si può pervenire a una divisione senza resto. Per es. 5743,27 diviso per 16 dà per quoziente esatto 358,954375.

51. Con questo metodo si può ottenere un quoziente o esatto o approssimato anche quando il dividendo non contiene decimali; giacchè mettendo una virgola dopo il dividendo si possono aggiunger quanti zeri si vorranno. Infatti il numero 583 è lo stesso che 583,000... Per conseguenza 583 diviso per 25 dà per quoziente esatto 23,32.

583	25
83	23 32
80	
50	
0	

52. Quando non si può ottenere un quoziente esatto, il quoziente diverrà tanto più approssimato, quanto più si prolungherà l'operazione, e l'errore che si commette sarà minore di un'unità dell'ordine a cui si è interrotta l'operazione. Se nell'es. precedente si fosse finita la divisione dopo la terza decimale, si sarebbe avuto il quoziente approssimato 358,954, e l'errore proveniente dalle cifre trascurate sarebbe evidentemente minore di 0,001.

Sia ancora l'altro esempio posto a lato. Si faccia la divisione, e si ottenga il quoziente fino alla quarta cifra decimale. Or è chiaro che qualunque possa esser il numero delle cifre che verrebbero nel quoziente continuando la divisione, prese insieme non possono formare un diecimillesimo; altrimenti il quoziente sarebbe 63,8414. Dunque l'errore è minore di 0,0001.

2358,43	37
138	63,7413
27 4	
1 53	
50	
130	
19	

53. Se il primo dividendo parziale comprende cifre decimali, siccome la cifra del quoziente dev'esser dello stess'ordine di quella del dividendo parziale, prima di scriver la cifra del quoziente si metteranno gli zeri necessari. Così nell'esempio posto a lato siccome il primo dividendo parziale 3543 rappresenta millesimi, nel quoziente si scriverà prima il 0 per gl'interi e due altri zeri; poi scritta la prima cifra 4 si continuerà l'operazione. Da ciò risulta che i decimali permettono di dividere un numero più piccolo per uno più grande.

3,5432	783
	0,004

CAPO III.

DELLE FRAZIONI.

54. Bisogna rammentarsi che l'unità è il termine cui si paragonano le diverse quantità che si vogliano rappresentare, e che il numero è il risultamento del confronto fatto della quantità colla sua unità (n^i 2 e 3). I numeri che risultano da questo confronto si riducono a due classi, interi e frazionari, e questi ultimi possono esser maggiori e minori dell'unità. Ora avendo esposto come si scrivono i numeri interi e come si eseguono su di essi le quattro operazioni principali, è necessario ora far conoscere come si possono rappresentare i numeri frazionari, e dar poi le regole per eseguir su di essi le quattro operazioni.

In seguito per brevità di discorso si farà uso de' seguenti segni.

Spiegazione de' segni.

Il segno + indica l'addizione e si pronuncia *più*. Così 3 + 5 si legge 3 più 5, ed equivale a 8.

Il segno — interposto tra due numeri serve per indicar la sottrazione, e si pronuncia *meno*: 7—2 si pronuncia 7 meno 2, ed è lo stesso che 5.

Il segno × indica moltiplicazione; quindi l'espressione 3×5 si pronuncia 3 *moltiplicato per* 5, ed equivale a 15. Questo prodotto s'indica ancora così: 3.5.

Il segno : indica divisione: 15:5 si pronuncia 15 *diviso per* 5.

Il segno = rappresenta l'eguaglianza di due quantità, e si pronuncia *eguale*.

A R T. I.

Natura delle frazioni, e modo di rappresentarle.

55. Quando una quantità non può essere rappresentata esattamente per mezzo dell'unità ripetuta, è necessario ricorrere ad un'unità più piccola, dalla cui ripetizione possa risultare la quantità data.

Così si fa ne' decimali; dove secondo il bisogno si ricorre ad unità 10, 100, ec. volte più piccola. Per es. il numero 3,27 corrispondendo a 327 centesimi indica una quantità, che non ha potuto essere rappresentata esattamente che per mezzo di un'unità cento volte più piccola dell'unità primitiva.

La grandezza dell'unità o la sua denominazione dipendendo ne' decimali dal posto delle cifre, non vi è bisogno per rappresentar queste frazioni che di un solo numero. Ma quando le suddivisioni

dell'unità non hanno relazione col sistema di numerazione, per rappresentare le frazioni vi bisognano due numeri, uno che faccia conoscere in che modo l'unità scelta dipende dall'unità principale, l'altro esprima il numero di queste unità. Il primo si chiama *denominatore*, il secondo *numeratore*. Si è convenuto di scrivere il numeratore e il denominatore l'uno sotto l'altro, separati da una linea e di leggerle nominando il numeratore come se fosse numero intero e dando al denominatore la desinenza de' numeri ordinali, cioè la desinenza in *esimi* che compete ai quozienti, e già adoperata ne' decimali (n° 40), salvo le eccezioni che comporta la lingua in cui si parla. Perciò $\frac{3}{5}$ si legge: *tre quinti*, $\frac{2}{9}$ si legge: 2 *noni*; $\frac{7}{32}$ si legge: 7 *trentaduesimi.*

Ciò posto la quantità $\frac{3}{5}$ rappresenta 3 unità cinque volte più piccole dell'unità principale; parimente $\frac{327}{64}$ rappresenta 327 unità ciascuna delle quali è la sessantaquattresima parte dell'unità principale. Si tenga sempre presente l'idea fondamentale, che il numeratore esprime il numero delle unità come negl'interi e il denominatore serve solamente per indicar la grandezza dell'unità o la sua dipendenza dall'unità principale.

Or se data l'unità principale, si volesse assegnar la quantità rappresentata da $\frac{3}{5}$, evidentemente bisognerebbe divider l'unità in cinque parti eguali e di queste prenderne 3. Quindi i due numeri coi quali si rappresenta la frazione suddetta esprimono che l'unità è divisa in cinque parti e di queste se ne prendono 3; o ancora che delle 3 unità che compongono il numeratore, ciascuna è stata divisa in cinque parti e di queste se n'è presa una sola. Ma nella stessa quantità $\frac{3}{5}$ tanto è dividere ciascuna unità in cinque parti eguali, e poi riunire i quozienti, quanto dividere immediatamente tutta la quantità 3 in cinque parti eguali; perciò $\frac{3}{5}$ indica ancora il quoziente di 3 diviso per 5.

56. Che le frazioni possano trarre origine dalla divisione si vedrà meglio dall'annesso esempio. Dopo aver diviso 431 per 8 si avrà per quoziente 53, per resto 7. Volendo dunque dividere 431 in 8 parti eguali intere è impossibile; nè si può fare altrimenti la divisione esatta che aggiungendo al quoziente una frazione dell'unità. Or se il resto fosse stato 1, bastava divider l'unità in 8 parti e aggiungerne una al quoziente. Facendo questa operazione con ciascuna delle 7 unità del resto, si vede che la parte da aggiungersi al quoziente si ottiene dividendo l'unità in 8 parti, e di queste prendendone 7; il che dà la frazione $\frac{7}{8}$. Perciò questa frazione indica, che dovrebbe dividersi 7 per 8.

431	8
31	53
7	

In generale una frazione è l'indicazione di una divisione che non si è voluto o non si è potuto effettuare, o in altri termini una frazione indica il quoziente del numeratore diviso pel denominatore. Ma questo quoziente è diverso da quello che si ottiene allorchè si effettua la divisione. In effetto 35 diviso per 5 dà per quoziente 7; nel qual numero è scomparsa ogni traccia degli elementi che l'hanno prodotto, mentre il quoziente $\frac{3}{5}$ è indicato per mezzo degli stessi elementi da cui deriva, cioé del dividendo e del divisore.

57. Per poter avere idea di una grandezza, bisogna misurarla. L'unità è la misura di una quantità espressa da un numero intero; una parte più piccola dell'unità serve a misurar i numeri frazionari. Considerando la frazione $\frac{4}{9}$ si vedrà che $\frac{1}{9}$ serve di misura comune all'unità e a questa quantità, giacchè è contenuto nove volte nell'unità quattro volte nella quantità rappresentata da $\frac{4}{9}$. Quindi i due numeri per mezzo de' quali è rappresentata la grandezza $\frac{4}{9}$ indicano ancora quante volte la misura comune è contenuta in essa e nell'unità. Perciò i numeri interi e le frazioni si chiamano *commensurabili*.

58. Da tutto ciò risulta che una frazione, come $\frac{4}{5}$, si può riguardare sotto tre punti di vista differenti, cioè: 1° come 4 unità cinque volte più piccole dell'unità principale; 2° come l'unità divisa in cinque parti di cui se ne prendono 4; 3° come l'indicazione della divisione di 4 per 5.

59. Siccome il valore di un'espressione frazionaria si ottiene dividendo l'unità in tante parti quante unità contiene il denominatore, e di queste se ne prende un numero rappresentato dal numeratore, si vede che un'espressione frazionaria è maggiore, eguale o minore di 1 secondo che il numeratore è maggiore, eguale o minore del denominatore. Così $\frac{7}{6}$ è maggiore di 1, $\frac{5}{5}$ è uguale a 1, e $\frac{3}{4}$ è minore di 1. Ma siccome una frazione indica il quoziente del numeratore diviso pel denominatore, si può conchiudere che in qualunque divisione il quoziente è maggiore di 1 se il dividendo è maggiore del divisore, eguale se uguale, e minore se minore; siccome già si sapeva.

60. Si possono da' numeri frazionari ricavar gl'interi, eseguendo l'indicata divisione, cioè dividendo il numeratore per il denominatore; il quoziente sarà la parte intera e il resto formerà il numeratore della frazione che rimane, e che avrà lo stesso denominatore. Perciò $\frac{428}{9} = 47\ \frac{5}{9}$.

Viceversa un intero unito ad una frazione si riduce ad un sol numero frazionario, moltiplicando l'intero pel denominatore della frazione, e questo prodotto sommato col numeratore della frazione forma il numeratore del numero frazionario, il quale avrà per denominatore quello stesso della frazione. E ciò perchè il quoziente moltiplicato pel divisore, più il resto, deve produrre il dividendo. Per esempio $13\frac{2}{5}=\frac{67}{5}$.

Potendosi ogni numero frazionario ridurre a un intero più una frazione, i numeri frazionari e le frazioni avranno proprietà comuni, e basterà d'ora innanzi parlare delle sole frazioni.

61. Ogni numero intero può essere espresso sotto forma di frazione di una specie data moltiplicando l'intero per un dato numero. Così 5 si esprime per mezzo di $\frac{1}{7}$ dell'unità, scrivendo $\frac{35}{7}$.

Ogni numero intero può anche assumer la forma di frazione supponendo che il denominatore fosse 1. Così 3 è lo stesso che $\frac{3}{1}$.

Questa osservazione permette di considerar gl'interi come un caso particolare delle frazioni, e di estendere i risultamenti ottenuti per le frazioni al caso in cui qualche frazione divenisse intero, imperocchè basta solo supporre che il denominatore sia 1.

62. Siccome il divisore moltiplicato per il quoziente riproduce il dividendo, il quoziente $\frac{4}{5}$ moltiplicato pel divisore 5 deve riprodurre il dividendo 4; cioè una frazione moltiplicata per il denominatore dà per prodotto il numeratore. Ma col sopprimere il denominatore nella frazione $\frac{4}{5}$ si viene il 4 a riferire ad un'unità cinque volte più grande; dunque in generale si può conchiudere che col moltiplicare un numero per un intero si produce lo stesso effetto come se si prendesse un'unità più grande; siccome già si sapeva (n° 46). Similmente un numero qualunque 7 si divide per 5 scrivendo $\frac{7}{5}$; ma questo corrisponde a riferire il 7 ad un'unità 5 volte più piccola, dunque col dividere un numero per un intero è come se si riferisse il primo numero ad una unità più piccola.

63. Considerando il denominatore come un segno destinato a rappresentar la grandezza dell'unità cui si riferisce il numeratore, tutte le operazioni fatte sul numeratore, il risultamento delle quali è indipendente dalla grandezza dell'unità, produrranno lo stesso effetto che sugl'interi. Perciò moltiplicando o dividendo il numeratore per un numero intero, senza toccare il denominatore, si moltiplica o si divide la frazione. In effetti moltiplicando per 2, per 3 il numeratore,

si viene a prendere un doppio o triplo numero di parti della stessa grandezza, il che corrisponde precisamente a moltiplicare per un intero.

Al contrario moltiplicando il denominatore senza toccare il numeratore si viene a dividere la frazione, e dividendo il denominatore si moltiplica la frazione. In effetti l'unità cui si rapporta il numeratore è tanto più piccola quanto più grande è il denominatore; quindi moltiplicando il denominatore per 2, si viene a divider l'unità in un numero doppio di parti, perciò ciascuna parte è la metà di quel che era; ossia col moltiplicare il denominatore per 2 si viene a divider l'unità primitiva in due parti, col moltiplicare il denominatore per 3, ciascuna parte diviene il terzo di ciò che era, e quindi il numeratore sarà riferito ad un'unità che è la terza parte di quel che era, e così di seguito. E siccome tanto è prendere una unità che sia $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ec. di quel che era prima, quanto dividere un numero per 3, per 4, ec., ne segue che la frazione resta divisa per quel numero pel quale si moltiplica il denominatore.

Ragionando nel modo stesso si conchiude facilmente che dividendo per un numero qualunque il denominatore senza toccare il numeratore, resta la frazione moltiplicata per lo stesso numero.

Da ciò risulta che la moltiplicazione o la divisione operate nel numeratore producono lo stesso effetto che sugl'interi, e operate nel denominatore producono un effetto contrario al senso assegnato a queste operazioni.

Dunque se in una frazione si moltiplicano o si si dividono i suoi termini per un medesimo numero, il valore non cambia. Questa proprietà può dedursi immediatamente da' principii stabilti nel n° 46 col riguardare una frazione come una divisione indicata.

Le frazioni

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},\ \text{ec.}$$

che risultano moltiplicando i termini della prima per 2, 3, ec. sono tutte uguali.

64. Si vede da ciò che una quantità commensurabile che non può esser espressa da un numero intero, può esser rappresentata da una infinità di frazioni. Fra queste ve n'ha una che è la più semplice. Nell'esempio citato le più semplici son certamente le prime. Or se si prende per es. la frazione $\frac{42}{126}$ questa si riduce a $\frac{1}{3}$ dividendo i suoi termini per 42. Perciò si ridurrà una frazione ad una espressione più semplice dividendo il numeratore e il denominatore per qualche loro fattore comune. Se si ha per es. la frazione $\frac{546}{714}$, per vedere se può ridursi a più semplice espressione si sperimenterà la divisione dei suoi termini per 2, 3, 5, ec. Infatti dividendo per 2 il numeratore e il denominatore, quella frazione si riduce a $\frac{273}{357}$ che

è più semplice della proposta. Si tenta la divisione per 3, la quale riesce esattamente; e la frazione data si riduce all'espressione $\frac{91}{119}$. Passando allo sperimento degli altri numeri consecutivi, si trova che il primo che divide esattamente i termini 91 e 119 è 7. Effettuata la divisione, si ha finalmente la frazione molto semplice $\frac{13}{17}$.

Quanto più semplice è la frazione, ossia quanto più piccoli sono i termini da cui è rappresentata, tanto più distinta è l'idea che può formarsi del suo valore. È di fatto più difficile concepir il valore di un'unità divisa in 714 parti di cui se ne prendono 546, che di un unità divisa in 17 parti di cui se ne prendono 13. La riduzione delle frazioni alla più semplice espressione è della più grande importanza, ma però non può cadere che sulle frazioni, i termini delle quali hanno de' fattori comuni. Conviene quindi passare ad esporre alcune teoriche sulla divisibilità de' numeri, dalle quali dipende quella delle frazioni.

A R T. II.

Sulla divisibilità de' numeri

65. Un numero si dice *divisibile* per un altro, quando la divisione del primo pel secondo si fa senza resto.

Un numero si dice *primo* quando non ha altro divisore che sè stesso e l'unità. Così 2, 3, 5, 7, 11, 13, ec. sono numeri primi. Due numeri si dicono *primi tra loro*, quando non hanno alcun divisore comune. Per es. 8 e 15 sono primi tra loro.

Poste queste definizioni, ecco alcuni teoremi sulla divisibilità de' numeri.

66. *Se un numero è composto di più parti, ovvero è la somma di altri numeri dati, dividendo ciascuno di questi numeri per un dato divisore, il resto che lascia il numero dato è uguale a quello che lascia la somma de' resti delle sue parti.* Per es. sia $66 = 37 + 25 + 4$; dividendo ciascuna di queste parti per 8 si hanno i resti 5, 1, 4 (*), la cui somma 10 divisa per 8 dà per resto 2; e questo è appunto il resto di 66 diviso per 8.

Imperocchè 66, essendo eguale a $37+25+4$, si potrà considerare come composto di $32 + 5 + 24 + 1 + 4$, dalla quale somma togliendo le parti 32 e 24 che son moltiplici di 8, si viene a togliere una parte degli 8 contenuti in 66: sicchè togliendo l'8 quante volte si può dalla somma rimanente $5 + 1 + 4$, si ha il resto della divisione di 66 per 8.

67. Da ciò si ricavano le conseguenze seguenti.

1° Se ciascuna parte di un numero è separatamente divisibile

(*) 4 diviso per 8 dà per quoziente 0 e per resto 4.

per un dato divisore, lo sarà pure il numero. Per es. se si fa $40 = 25 + 15$, siccome ciascuna parte è divisibile per 5, anche 40 sarà divisibile per 5.

2° Se un numero è divisibile per un altro, dev'esser pure la somma de' resti delle sue parti; e viceversa.

3° Se un numero che ha un divisore è composto di due parti, una delle quali sia divisibile per questo divisore, dev'esserlo ancora l'altra parte.

68. *Se un numero è divisibile per un altro, tutt'i moltiplici del primo saranno divisibili per lo stesso numero.* Per es. 24 è divisibile per 3; anche 24×5 sarà divisibile per 3.

In effetti il numero che risulta dal prodotto 24×5 è composto delle parti $24 + 24 + 24 + 24 + 24$, ciascuna delle quali è divisibile per 3; perciò (n° prec. 1°) lo sarà tutto il numero.

69. *Se si divide un prodotto e i due fattori per un dato divisore e poi il prodotto de' resti de' fattori si divide per lo stesso divisore, il resto di quest'ultima divisione sarà eguale al resto dato dal prodotto.*

In effetti sia dato il prodotto 254×27. Si divida l'uno e l'altro fattore per un divisore qualunque, per es: 7, e si notino i resti. Il resto di 254 diviso per 7 è 2, quello di 27 è 6. Si può dunque de' numeri 254 e 27 formarne due parti, una che sia un moltiplice di 7, e l'altra sia il resto. Il primo numero si dividerà nelle due parti $252 + 2$; ora il prodotto 254×27 è uguale a quello di $252 + 2$ per 27, cioè quello di $252 \times 27 + 2 \times 27$ (n° 24); ma la prima parte è un moltiplice di 7, dunque il resto che dà il prodotto dato diviso per 7 è uguale a quello che dà 2×27 (n° 66). Quest'ultimo prodotto è uguale a quello di 2×21 più 2×6; e per la stessa ragione il resto della divisione per 7 del prodotto de' numeri dati sarà uguale al resto della divisione per 7 del prodotto 2×6 de' resti de' fattori; il quale resto è 5. In effetti il prodotto $254 \times 27 = 6858$, diviso per 7, dà per resto 5.

Dunque per un dato divisore *il resto del prodotto è uguale a quello che lascia il prodotto de' resti de' fattori.*

70. *Il prodotto di due fattori non può esser divisibile per un numero primo che sia maggiore di ciascun fattore.*

In effetti si supponga, se è possibile, che il prodotto 19×17 sia divisibile per 29. Il prodotto 29×17 è divisibile per 29. Ma $29 = 19 + 10$; perciò quel prodotto equivale alla somma de' due prodotti $19 \times 17 + 10 \times 17$. Ma il primo, cioè 19×17 è per ipotesi divisibile per 29, dunque anche 10×17 dev'esser divisibile per 29 (n° 67, 3°). Ora 10 è il resto della divisione di 29 per 19, perciò se il prodotto 19×17 fosse divisibile per 29, anche tale sarebbe il prodotto che risulta sostituendo al fattore 19 il resto di 29 diviso per 19. Per la stessa ragione se 10×17 è divisibile per 29, sostituendo a 17 il resto di 29 diviso per 17 che è 12, ne risulta che anche 10×12, prodotto de' resti di 29 diviso per ciascun

fattore, sarebbe divisibile per 29. Dividendo nuovamente 29 per 10 e per 12 si hanno i resti 9 e 5; e quindi il prodotto 9×5 sarebbe divisibile per 29.

Continuando così ad operare, i prodotti de' resti successivi sarebbero tutti divisibili per 29. Or questo è impossibile; perchè, essendo 29 numero primo, le divisioni danno sempre un resto; e i resti andando diminuendo, si arriverà necessariamente a due resti il cui prodotto è minore di 29. Dunque un prodotto non può esser divisibile per un numero primo maggiore di ciascun fattore.

71. Affinchè un prodotto di due fattori sia divisibile per un numero primo, conviene che il prodotto de' resti de' fattori sia divisibile per questo numero primo (n° 69); ma questo è impossibile (n° 70); dunque il prodotto de' resti dev'esser nullo, cioè uno de' resti dev'esser zero. E quindi un numero primo non può dividere un prodotto, se non divide uno de' fattori.

Quindi il fattore divisibile per un numero, se è numero primo, dev'esser necessariamente eguale al divisore. Perciò un numero divisibile per molti numeri primi, deve contener per fattori primi tutti questi divisori, e può cosiderarsi come risultante dal prodotto di tutti questi divisori per un altro fattore.

72. Da ciò segue:

1° che un numero che ha più divisori primi, è divisibile pel loro prodotto; e viceversa,

2° che se un numero ha più fattori, diviso per uno di essi, il quoziente conterrà tutti gli altri;

3° che se nel dividendo si trovano tutti i fattori del divisore, la divisione si fa senza resto;

4° che un numero si può scomporre in molte maniere in fattori non primi, ma in un sol modo in fattori primi.

73. Si scomponga un numero qualunque, per es. 374, in diecine e unità, e si avrà $370 + 4$. Ora 370 è divisibile per 10 (n° 31), e $10 = 2 \times 5$, dunque sarà divisibile per 2 e per 5 (n° prec.). Quindi se la seconda parte è divisibile per 2 o per 5, anche il numero proposto lo sarà (n° 67, 3°). La divisibilità di un numero per 2 o per 5 non dipende dunque che dalla sua ultima cifra.

Or osservando nella tavola di Pitagora (n° 22) i moltiplici di 2 o di 5 composti di una sola cifra, si ricaverà: 1° che un numero si potrà dividere per 2 se è terminato da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8; 2° sarà divisibile per 5 se l'ultima cifra è *zero* o 5.

Parimente scomponendo un numero in centinaja e unità si ricava, che per esser divisibile per 4 lo debbono esser le sue due ultime cifre. Scomponendolo in migliaja e unità si deduce, che sarà divisibile per 8, se le tre ultime cifre lo sono.

I numeri che possono esser divisi esattamente in due parti eguali ossia che sono divisibili per 2, si dicono *pari*, gli altri si chiamano numeri *impari*. I numeri primi, eccettuato 2, si trovano tutti fra i numeri impari.

74. I numeri 10, 100, 1000, ec. si possono scomporre in $9+1$, $99+1$, $999+1$, ec. Or la prima parte è esattamente divisibile per 9, perchè lo è ciascuna cifra in particolare (n° 33), e la seconda parte è minore di 9, dunque il resto della divisione di questi numeri per 9 è sempre 1. Ciò posto, essendo 300 eguale a $100+100+100$, ciascuna di queste parti divisa per 9 dà per resto 1; dunque (n° 66) 300 diviso per 9 dà per resto 3. Per la stessa ragione 5000 diviso per 9 dà per resto 5, 70 diviso per 9 dà per resto 7.

Sia ora il numero 3747; questo è uguale a $3000+700+40+7$. Il resto della divisione per 9 del numero dato è uguale alla somma de' resti delle parti di cui è composto, che sono le stesse cifre significative. Dunque il resto della divisione per 9 di un numero qualunque è uguale a quello che si ottiene dividendo per 9 la somma delle sue cifre. Quindi 3747 diviso per 9 dà lo stesso resto che 21 diviso per 9: e questo resto è 3.

Dunque un numero è divisibile per 9 se lo sarà la somma delle sue cifre. I numeri 3573, 207, 459 son divisibili esattamente per 9.

Si riconosce facilmente che la stessa proprietà appartiene al numero 3. Dunque se la somma delle cifre di un numero è divisibile per 3, lo sarà anche il numero.

85. È facile trovare i resti de' numeri

1, 10, 100, 1000, 10000, ec.

divisi per un numero qualunque. Suppongasi che questi numeri si vogliano dividere per 7. Siccome 1 è minore di 7, il resto di 1 diviso per 7 è 1. Poi 10 diviso per 7 dà per resto 3; 100 che è uguale a 10×10 darà lo stesso resto che 3×3 diviso per 7, ossia 2 (n° 69). Parimente $1000=100\times10$ diviso per 7, darà per resto 2×3, ossia 6; 10000 diviso per 7 darà per resto 3×6 diviso per 7, ossia 4; 100000 diviso per 7 dà per resto 5; 1000000 diviso per 7 dà per resto 1; e così di seguito. Arrivati al primo resto 1, debbono necessariamente ritornare i medesimi resti collo stess'ordine; perciò che essi si ottengono sempre colle medesime operazioni. I resti adunque della divisione per 7 de' numeri 1, 10, 100, 1000, ec. sono 1, 3, 2, 6, 4, 5, e questi ritornando sempre col medesimo ordine formano un *periodo*. Essendo il resto minore del divisore, il numero de' termini che formano il periodo può essere al più quanto il divisore meno uno, ma può essere anche minore (*).

Or se il resto di 100 diviso per 7 è 2, quello di 500 diviso per 7 è uguale a quello di 5×2 diviso per 7, cioè 2, giacchè 500 è uguale a 5×100. Parimente essendo 6 il resto di 1000 diviso 7,

---

(*) Si dimostrerà in Algebra che quando il divisore è numero primo, il numero de' termini che formano il periodo, o è il divisore meno uno, o un summultiplice del divisore meno uno; e che il periodo comincia al primo termine o no, secondo che il divisore è primo o non è primo con 10.

quello di 3000 diviso per 7 sarà $\frac{3 \times 6}{7}$, ovvero 4; ec. Conoscendo adunque il resto delle divisioni di 1, 10, 100, 1000, ec. per 7 si conoscerà anche quello di un numero qualunque diviso per 7 con moltiplicare le unità, diecine, centinaja ec. pe' resti rispettivi di 1, 10, ec., farne la somma e dividerla per 7.

Si prenda ad esempio il numero 783582496. Si disporrà l'operazione come quì a lato
Si scriveranno dalla destra verso la sinistra sotto le cifre del numero i resti secondo l'ordine ottenuto. Poi si farà il prodotto delle cifre corrispondenti alla stessa colonna verticale. La somma di tutti questi prodotti è 149. Si opererà su questo numero come sul primo, e così si continuerà finchè si arrivi a un numero che non ha più di due cifre, il cui resto si scopre a colpo d'occhio.

```
783582396
231546231
---------
        6
       27
        6
       12
       32
       25
        3
       24
       14
      ---
      149
      231
      ---
        9
       12
        2
      ---
       23
        2
```

Dal modo come si ottiene il resto si vede che un numero può variare in moltissime maniere e dar sempre il medesimo resto, allorchè si divide per un dato numero. Imperocchè, ragionando sull'esempio precedente, si vede che tutte le cifre corrispondenti alla medesima cifra del periodo, per es. al 3, si potranno invertire o variar comunque di valore, purchè diano sempre la medesima somma, e parimente la somma delle cifre che corrispondono al 3 si potrà aumentare di una certa quantità, purchè di altrettanto si accrescano quelle corrispondenti al 4, o al contrario. Potendosi far lo stesso per tutte le altre cifre del periodo, si vede che un numero si può cambiare in infiniti modi e dar sempre lo stesso resto.

Così i numeri 386542753, 793585389 e molti altri darebbero tutti lo stesso resto 2.

Due numeri che divisi per un dato divisore danno lo stesso resto, sottratti l'un dall'altro, danno una differenza divisibile per questo divisore.

Dunque se da un numero si sottrae un altro numero composto delle stesse cifre scritte con altro ordine, il resto sarà divisibile per 9.

76. I numeri 1, 10, 100, 1000, ec. divisi per 4 danno per resto 1, 2, 0, 0...; dunque si ha il resto della divisione di un numero per 4, dividendo per 4 la somma della prima cifra a destra e della seconda moltiplicata per 2; e se questa somma divisa per 4 non dà resto, il numero sarà divisibile per 4. I numeri 532, 1744 son divisibili per 4.

I resti degli stessi numeri 1, 10, 100, 1000, ec. divisi per 8, sono 1, 2, 4, 0, 0,....; dunque sommando la prima cifra a destra, la seconda moltiplicata per 2, la terza moltiplicata per 4, e dividendo questa somma per 8, si ha lo stesso resto che dà il numero diviso per 8.

Nel n° 73 si era già dimostrato che la divisibilità di un numero per 4 dipende dalle due ultime cifre; per 8 dalle tre ultime, ec.

77. I resti della divisione per 11 de' numeri 1, 10, 100, ec. sono 1, 10, 1, 10, ec. Dunque si ottiene il resto della divisione per 11 prendendo quello delle cifre a due a due. Dato per esempio il numero 857848, il resto della divisione per 11 sarà uguale alla somma de' resti di 48, 78, 85 divisi rispettivamente per 11. Or moltiplicando i primi 9 numeri per 11 si ha 11, 22, 33, 44, ec. cioè un numero composto di due cifre uguali, perciò il resto della divisione per 11 di un numero di due cifre è uguale alla differenza fra le unità e le diecine, o fra le unità aumentate di 11 e le diecine, nel caso che la prima cifra a destra sia minore della seconda. I resti adunque di 48, 78, 85 divisi per 11 sono 4, 1, 8; sommati danno 13. Ma il resto della divisioue di 13 per 11 è 2, perciò 857848 diviso per 11 dà per resto 2. In vece di sottrarre la prima cifra a destra dalla seconda, poi la 3ª dalla 4ª, poi la 5ª dalla 6ª, ec., sarà più facile sommare le cifre di posto impari, cioè la 1ª, la 3ª, la 5ª, ec., e sottrarne la somma della 2ª, 4ª 6ª, ec. Se la seconda somma è maggiore della prima, si aggiungerà 11 al primo numero, e si farà la sottrazione.

Dunque se in un numero la somma delle cifre di posto impari è uguale a quella delle cifre di posto pari, o la loro differenza è un multiplice di 11, il numero sarà divisibile per 11.

78. Si possono trovare tutti i divisori primi di un numero, dividendolo prima per 2 quante volte si può, poi per 3, e così di seguito.

Sia per es. il numero 360. Si divida per 2, e si ha per quoziente 180; si divida nuovamente per 2, e si ha per quoziente 90; diviso questo per 2 si ha per quoziente 45, che non è più divisibile per 2. Si divida per 3, e si ha per quoziente 15, si divida nuovamente per 3, e si ha per quoziente 5. Il numero proposto sarà dunque eguale a $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$. Per avere i divisori composti basterà combinare questi divisori semplici in tutte le maniere possibili. A tal uopo si disporrà l'operazione come qui si vede.

360	1	1
180	2	2
90	2	4
45	2	8
15	3	3 6 12 24
5	3	9 18 36 72
1	5	5 10 15 20 30 40 45 60 90 120 180 330.

La prima colonna contiene i quozienti e la seconda i divisori del numero proposto. Nella terza colonna si scriveranno i divisori semplici e tutti quelli che risultano dal prodotto de' fattori eguali. Poi a lato del divisore 3 si metteranno i divisori che risultano dal prodotto di 3 per tutti i divisori precedenti. A fianco del 9 si scriveranno i divisori che risultano dal prodotto di 9 per tutti i divisori precedenti, eccettuato 3. Finalmente a fianco del 5 si scriveranno

i prodotti di 5 per tutti i divisori precedenti. Si avranno così tutti i divisori del numero proposto.

79. Nella ricerca de' divisori primi, bisogna spingere il tentativo fino a che nella serie de' numeri primi se ne trovi uno che moltiplicato per se stesso produce un numero maggiore del dato. Si domandino per es. i divisori primi di 163. Osservando che questo numero non può aver per divisori 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, e che $13 \times 13 = 169$; non si dovrà fare il saggio che sul numero 7; e siccome la divisione non riesce esattamente, se ne può conchiudere che 163 è numero primo. In effetti se 163 potesse avere un divisore maggiore di 13, siccome 13×13 dà un numero maggiore di 163, converrebbe che l'altro fattore fosse minore di 13, cioè 163 dovrebbe avere un divisore minore di 13; il che è impossibile.

80. Se due numeri hanno un divisore comune, questo divisore sarà anche comune al resto della divisione di uno per l'altro. Sieno per es. i due numeri 429 e 54 che hanno per divisore comune 3. Se si divide 429 per 54 si ha per resto 51 che è anche divisibile per 3. In effetti $429 = 54 \times 7 + 51$. Or delle due parti che compongono il numero 429 la prima è divisibile per 7, dovrà dunque esserlo anche la seconda (n° 67, 3°).

Se si divide un numero per un altro, e poi il nuovo divisore pel nuovo resto, e così continuando, col passar sempre il divisore precedente per dividendo e il resto per divisore, si arrivi a una divisione senza resto; l'ultimo divisore sarà un divisore comune ai due numeri dati. Sieno per es. i due numeri 377 e 156. Dividendo 377 per 156 si ha per resto 65; dividendo 156 per 65 si ha per resto 26; dividendo 65 per 26 si ha per resto 13; dividendo 26 per 13 non si ha resto: sarà 13 un divisore comune di 377 e 156. Di fatto 13 dividendo sè stesso e 26, dividerà anche 65 che è uguale $26 \times 2 + 13$ (n° 67, 1°). Dividendo 65 e 26, dividerà anche 156 che è uguale $65 \times 2 + 26$. Per la stessa ragione dividendo 156 e 65, dividerà pure $377 = 156 \times 2 + 65$. Dunque 13 divide i due numeri dati 156 e 377. È inoltre il più grande de' divisori comuni; in effetti se 377 e 156 avessero un divisore più grande, questo divisore dovrebbe divider 65, 26 e 13, il che è impossibile, perchè 13 non può esser diviso da un numero più grande di sè stesso. Per queste proprietà il numero 13 si chiama il *massimo comun divisore* de' due numeri 377 e 156.

Per trovare il massimo comun divisore fra due numeri dati si terrà la seguente regola. *Si dividerà il più grande per lo più piccolo, poi si passerà il resto per divisore e il divisore per dividendo; il resto di questa seconda divisione passerà per divisore e l'ultimo divisore per dividendo; e così si continuerà finchè si pervenga ad una divisione senza resto. L'ultimo divisore sarà il m. c. divisore richiesto.*

L'operazione potrà disporsi come si vede scritto qui appresso pe' due numeri 377 e 156.

377	156	65	26	13
	2	2	2	2

Se il divisore che non dà resto fosse l'unità, i due numeri non avrebbero per divisore comune che l'unità: sarebbero perciò numeri primi tra loro (n° 65).

È chiaro inoltre che questo metodo conduce sempre all'intento, giacchè i resti andando sempre diminuendo, si deve finalmente arrivare a un resto, o eguale a 1, o che divide il precedente.

81. Nella ricerca del m. c. divisore fra due numeri giova, per abbreviare il calcolo, aver presenti le seguenti osservazioni.

1° Se nel corso dell'operazione si arriva ad un resto che si conosce esser numero primo, è inutile continuare il calcolo. Così pe' due numeri 347 e 91 arrivati al resto 17, è inutile andar più innanzi, perchè 17 essendo numero primo e non dividendo 74, i numeri proposti sono primi tra loro.

347	91	74	17
	3	7	

2° Se uno de' numeri ha un divisore che l'altro non ha, si potrà dividere il primo numero per questo divisore, e far uso del quoziente in vece del numero dato. In effetti nell'esempio di sopra, 156 è divisibile per 3 e per 4 ossia per 12, mentre 577 non lo è; dunque 12 non può far parte del m. c. divisore. Diviso 156 per 12 si ha per quoziente 13, per cui si opererà sopra i numeri 377 e 13, e siccome la prima divisione riesce esatta, si trova subito che il m. c. divisore è 13.

3° Prima d'incominciar l'operazione indicata sarà utile il togliere tutt'i fattori comuni che si scoprono alla semplice ispezione de' numeri o colle regole de' n[i] 73 e seguenti. Ciò ha per oggetto di render più breve il calcolo operando sopra numeri più piccoli. Il m. c. divisore sarà allora il prodotto del divisore trovato colla regola del n° prec. pei fattori che sono stati tolti da principio. Sieno per es. i due numeri 315 e 4368 de' quali si cerca il m. c. divisore. Osservando che il primo ha per fattore 5 che non divide il secondo, e il secondo ha per fattore 4 che non è comune al primo, si potrà dividere il primo per 5 il secondo per 4, e si avranno i numeri 63 e 1092, su i quali si dovrà operare. Essi avendo il fattore comune 3 si potranno ridurre, colla soppressione del detto fattore, a 21 e 364. Questi due numeri hanno per fattore il primo 3 e il secondo 4. Divisi dunque uno per 3 l'altro per 4, divengono 7 e 91. Si è ridotta così la quistione ad operare sopra i due numeri 7 e 91 e siccome la divisione si fa esattamente, sarà 7 il m. c. div. di 7 e 91; e quindi 7×3 ossia 21 sarà il m. c. d. de' numeri dati 315 e 4368.

82. Trovato il massimo comun divisore, in vece di dividere i nu-

meri dati pel m. c. divisore trovato, si può pervenire a' quozienti, trovando successivamente tutti i quozienti de' resti. Riprendendo il quadro dell'operazione fatta al n° 73,

$$\begin{array}{lllll}
377 & 156 & 65 & 26 & 13 \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
29 & 12 & 5 & 2 & 1
\end{array}$$

ecco come bisogna operar per l'oggetto. È chiaro che 13 è contenuto in 13 una volta e due volte in 26; si scrivono questi quozienti in una terza linea e in corrispondenza de' numeri 13 e 26. Ora essendo $65 = 26 \times 2 + 13$, 65 diviso per 13 sarà uguale alla somma de' quozienti delle sue parti, cioè al quoziente di 26 ripetuto due volte, più quello di 13; sarà quindi $2 \times 2 + 1 = 5$ il quale si scriverà sotto il 65. Parimente essendo $156 = 2 \times 65 + 26$, 156 diviso per 13 sarà uguale al quoziente di 65 ripetuto 2 volte, più quello di 26 ch'è stato già trovato: questo quoziente è 12. Si vede da ciò, che dopo aver scritto sotto l'ultimo numero il quoziente 1, e sotto il penultimo quello che vi si trova, i quozienti successivi si otterranno, moltiplicando fra loro i quozienti scritti sotto il resto precedente, e aggiungendo il numero che è a destra nella terza linea.

Pe' due numeri 3283, 1183 si procederà similmente.

$$\begin{array}{lllllll}
3283 & 1183 & 917 & 266 & 119 & 28 & 7 \\
 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\
469 & 169 & 131 & 38 & 17 & 4 & 1
\end{array}$$

I numeri scritti nella terza linea sono i quozienti che risultano dal dividere i numeri della prima linea per 7. Essi si ottengono, dopo aver scritti i primi due 1 e 4, colle seguenti semplicissime operazioni.

$$4.4 + 1 = 17,\ 2.17 + 4 = 38,\ 3.38 + 17 = 131,$$

$$131.1 + 38 = 169,\ 169.2 + 131 = 469.$$

83. Se due numeri si scompongono ne' loro fattori primi, riescono evidenti i loro fattori comuni; e il massimo comun divisore de' due numeri sarà uguale al prodotto di tutti i fattori primi comuni.

Una frazione si riduce alla sua più semplice espressione, dividendo i suoi termini pel m. c. divisore. Perciò dividendo i termini della frazione $\frac{156}{377}$ per 13 si ha la frazione ridotta alla sua più semplice espressione, che è $\frac{12}{29}$.

Una frazione i cui termini son primi tra loro, non potendosi ridurre ad espressione più semplice, si chiama *irriducibile*.

ART. III.

Operazioni sulle frazioni.

§ I. *Addizione e sottrazione.*

84. Non si possono sommare o sottrarre che i numeri che esprimono collezioni di unità del medesimo ordine (nº 12). Or l'ordine o la grandezza dell'unità nelle frazioni è rappresentata dal denominatore (nº 55); perciò non si possono sommare o sottrarre che le frazioni aventi lo stesso denominatore; e la somma o la sottrazione si esegue sopra i numeratori. Per es., $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$, $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}$, $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$.

85. Allorchè le frazioni hanno un denominatore diverso, per poterle sommare o sottrare bisogna esprimerle per mezzo della stessa unità, cioè convertirle in frazioni rispettivamente eguali alle prime e con lo stesso denominatore.

Sieno per es. le due frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Se si moltiplicano i termini della prima per 4 denominatore della seconda, e i termini della seconda per 3 denominatore della prima, queste frazioni si ridurranno a $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$. Si vede che il denominatore 12 è il prodotto de' due denominatori 3 e 4, e l'oggetto che si è avuto in mira è stato di divider l'unità in parti tanto piccole, sicchè una di queste fosse contenuta esattamente in ciascuna di quelle rappresentate dalle frazioni proposte. In effetti $\frac{1}{12}$ dell'unità è contenuto esattamente quattro volte in $\frac{1}{3}$, e tre volte in $\frac{1}{4}$.

Se si hanno più di due frazioni, si moltiplicheranno i termini di ciascuna frazione pel prodotto di tutti i denominatori delle altre. Sieno per es. la frazioni

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{7}.$$

Si moltiplicheranno i termini della prima per 35, quelli della seconda per 21, quelli della terza per 15, e si avranno le tre frazioni

$$\frac{70}{105},\ \frac{84}{105},\ \frac{30}{105},$$

rispettivamente eguali alle prime. È chiaro che questo metodo conduce sempre al fine proposto; giacchè il denominatore risulta dal prodotto di tutti i denominatori, il qual prodotto non varia qua-

lunque sia l'ordine con cui si prendono i fattori (n° 26, III). Ridotte le frazioni allo stesso denominatore, si sommeranno i numeratori come nel caso precedente. La somma delle tre frazioni date è $\frac{184}{105} = 1\frac{79}{105}$.

86. Per ridurre le frazioni allo stesso denominatore, facendo d'uopo divider l'unità in parti tanto piccole sicchè una di queste sia esattamente contenuta in ciascuna di quelle di cui si compongono le frazioni date, basterà che si trovi un numero divisibile per ciascun denominatore. Il numero che risulta dal prodotto di tutti i denominatori soddisfa a questa condizione. Ma quando i denominatori non son numeri primi fra loro esiste sempre un denominatore comune più piccolo di quello che dà la regola generale. Sieno per es. le frazioni

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8},$$

Si tratterà di trovare il più piccolo numero che possa esser diviso da' numeri 2, 4, 3, 6, 8. Osservando che 2 e 4 dividono 8, e che 3 divide 6, ogni numero divisibile per 6 e per 8 sarà anche divisibile per 2, 4, 3. Si può dunque far a meno di considerare i primi tre numeri, e la quistione è ridotta a trovare il più piccolo numero divisibile per 6 e per 8. Prendendo i multipli di 8, si esamina quale di essi è divisibile per 6. Si trova che il più piccolo di questi multipli divisibile per 6 è 24. Questo sarà dunque il denominatore comune. Si moltiplicheranno perciò i termini di ciascuna frazione pel quoziente che si ottiene dividendo 24 pel denominatore della frazione che si considera. Nel caso attuale si moltiplicheranno i termini della prima per 12, della seconda per 6, della terza per 8, della quarta per 4, della quinta per 3, e si avranno le frazioni

$$\frac{12}{24}, \frac{18}{24}, \frac{16}{24}, \frac{20}{24}, \frac{15}{24}.$$

In generale, il denominatore comune dev'esser il prodotto di tutti i fattori diversi che entrano ne' denominatori; per cui scomponendo i denominatori in fattori, sarà facile conoscere i fattori diversi e comporre il denominatore comune. Sieno per es. le frazioni

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, \frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{8}{9}, \frac{11}{12}, \frac{5}{6};$$

queste si possono scrivere

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2.2}, \frac{7}{2.2.2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{3.5}, \frac{8}{3.3}, \frac{11}{2.2.3}, \frac{5}{2.3};$$

e si vede immediatamente che il denominatore comune dev'essere 2. 2. 2. 3. 3. 5 = 360.

87. Per far la sottrazione, si ridurranno pure le frazioni allo stesso denominatore, e si eseguirà la sottrazione su i numeratori. Per es. $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$.

La riduzione delle frazioni allo stesso denominatore fa conoscere, di due frazioni qual è la più grande. Per es. sieno date le frazioni $\frac{7}{8}$ e $\frac{9}{11}$. Per conoscer qual è la più grande si ridurranno allo stesso denominatore, e si avranno le frazioni $\frac{77}{88}$, $\frac{72}{88}$. Duque la prima è maggiore della seconda, e l'eccesso è $\frac{5}{88}$.

88. Dovendo sommare interi uniti a frazioni, si farà prima la somma delle frazioni; se questa somma è maggiore di 1, se ne ricaveranno gl'interi che si uniranno alle unità. Nell'annesso esempio la somma delle frazioni è $\frac{121}{60}=2\frac{1}{60}$. Si scrive $\frac{1}{60}$, e il 2 siriporta alla colonna delle unità.

$$
\begin{array}{r}
354\ \frac{2}{3} \\
748\ \frac{3}{5} \\
24\ \frac{3}{4} \\
\hline
1128\ \frac{1}{60}
\end{array}
$$

89. Nella sottrazione d'interi uniti a frazioni, se la frazione del numero superiore è minore della frazione del numero inferiore, si staccherà dal numero superiore un'unità che si unirà alla frazione. Così nell'annesso esempio le due frazioni ridotte allo stesso denominatore divengono $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$. Non potendosi da $\frac{8}{12}$ sottrarre $\frac{9}{12}$, si staccherà dal numero 374 un unità che si convertirà in $\frac{12}{12}$, e unendola alla frazione $\frac{8}{12}$, si avrà $\frac{20}{12}$, da cui tolto $\frac{9}{12}$ resta $\frac{11}{12}$. Scritto $\frac{11}{12}$, si passa alla sottrazione degl i interi, ricordandosi che la cifra 4 del numero superiore dev'esser diminuita di un' unità.

$$
\begin{array}{r}
374\ \frac{2}{3} \\
128\ \frac{3}{4} \\
\hline
245\ \frac{11}{12}
\end{array}
$$

§ II. *Moltiplicazione e Divisione.*

90. Si moltiplica una frazione per un intero o moltiplicando il suo numeratore o dividendo il denominatore (n° 63). L'operazione secondo la prima maniera è sempre possibile; ma deve preferirsi la seconda, allorchè il denominatore è divisibile per l'intero, perchè si ottiene per prodotto una frazione più semplice. Così il prodotto di $\frac{3}{5}$ per 7 è $\frac{21}{5}$ e il prodotto di $\frac{7}{8}$ per 2 si ottiene dividendo il denominatore per 2, ed è $\frac{7}{4}$.

Si divide una frazione per un'intero o moltiplicando il suo deno-

minatore, o dividendo il numeratore per l'intero (n° 65). Si preferisce, quando è possibile, la seconda maniera per avere un quoziente più semplice. Quindi $\frac{2}{3} : 7 = \frac{2}{21}$, $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$.

91. Due frazioni si dicono *inverse*, quando i loro termini sono scritti in ordine contrario. Per es. $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$ son due frazioni inverse. E siccome a qualunque numero intero si può dar la forma di frazione supponendo che il denominatore sia 1, si vede che 3 e $\frac{1}{3}$ son due numeri inversi.

92. Debbasi ora moltiplicare un numero qualunque per una frazione, per es. $\frac{4}{5}$. Si sa (n° 47) che il prodotto che dà una cifra del moltiplicatore, oltre il valore assoluto ha un valore dipendente dall'unità cui si riferisce la cifra del moltiplicatore, e che perciò se si cambia l'unità dell moltiplicatore, anche quella del prodotto resta cambiata; o in altri termini se si moltiplica il moltiplicatore, il prodotto diviene multiplo, e per avere il vero prodotto bisogna dividerlo per quel numero per lo quale si è moltiplicato il moltiplicatere. Or questo principio generale sussistendo sempre, sarà applicabile anche alle frazioni.

Quindi se il moltiplicatore è $\frac{4}{5}$ basta moltiplicare per 4, e poi riferire il prodotto ad un'unità cinque volte più piccola dell'unità principale; ma questo si ottiene dividendo per 5; dunque si moltiplica un numero qualunque per una frazione, moltiplicandolo per il numeratore e dividendolo per il denominatore. In effetti col moltiplicare per 4 si è adoperato un moltiplicatore riferito ad un'unità cinque volte più grande; perciò il prodotto, per ritornare alla vera unità, deve dividersi per 5. Così $7 \times \frac{3}{11} = \frac{21}{11}$, $12 \times \frac{3}{4} = 9$.

Si osservi che è indifferente per il risultamento eseguir prima l'una o l'altra delle due operazioni; ma nel secondo caso giova meglio eseguir prima la divisione.

Se anche il moltiplicando è una frazione, siccome si moltiplica una frazione o moltiplicando il numeratore o dividendo il denominatore (n° 63), e si divide o dividendo il numeratore o moltiplicando il denominatore; perciò due frazioni si moltiplicano o moltiplicando tra loro i termini rispettivi, cioè numeratore per numeratore e denominatore per denominatore; o pure invertendo il moltiplicatore, e dividendo i termini del moltiplicando per i termini rispettivi del moltiplicatore inverso. Così $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$, $\frac{5}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.

Questa seconda maniera che dà un prodotto più semplice, non sempre è possibile.

93. Si vede da ciò che la moltiplicazione comprende due casi distinti, cioè quello del moltiplicatore intero e quello del moltiplicatore frazionario; nel primo caso si tratta di ripetere il moltiplicando tante volte quante unità contiene il moltiplicatore, nel secondo si tratta di prendere del moltiplicando quella stessa parte che il moltiplicatore è dell'unità. Per comprendere questi due casi sotto un sol punto di vista generale, si definisce la moltiplicazione *un'operazione mediante la quale si vuol formare per mezzo del moltiplicando un numero nel modo stesso che il moltiplicatore si forma per mezzo dell'unità.* In effetti $\frac{4}{5}$ si forma dividendo l'unità in 5 parti e poi prendendone 4, e moltiplicare un numero per $\frac{4}{5}$ corrisponde a dividere il numero per 5 e poi ripetere il quoziente 4 volte.

94. Dalle regole della moltiplicazione risulta:

1° Essendo $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$; il prodotto di due numeri inversi è uguale all'unità.

2° Poichè $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ la proposizione del n° 23 si estende anche al caso in cui i fattori sono frazionari. Quindi nella moltiplicazione di due frazioni è permesso di cambiar l'ordine de' fattori, e dividere i termini di una di essa per quelli della frazione inversa dell'altro fattore. Quindi $\frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{9}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$.

3° Il prodotto di più frazioni, potendo essere rappresentato da una frazione che ha per numeratore il prodotto di tutti i numeratori e per denominatore il prodotto di tutti i denominatori, e questi prodotti avendo un valore unico (n° 23), resta lo stesso con qualunque ordine si eseguano le moltiplicazioni. Si potranno perciò cambiar d'ordine i fattori de' termini del prodotto, e anche scomporli in altri fattori se ne hanno. Ciò rende facile la riduzione alla più semplice espressione, la quale si può conseguir con la soppressione de' fattori comuni prima di effettuare le moltiplicazioni. Così se si hanno le frazioni $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{4}{9}$ da moltiplicarsi, il prodotto sarà $\frac{5.6.2.3.15.4}{8.7.3.5.16.9}$ ovvero $\frac{6.2.\ 4.15}{7.8.16.\ 9} = \frac{6,15}{7.16.9} = \frac{6.3.5}{7.8.2.9} = \frac{5}{56}$

Al prodotto di più frazioni suol darsi il nome di *frazione di frazione*. In effetti il prodotto di $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ indica che della quantità rappresentata dà $\frac{4}{5}$ dell'unità principale se ne vogliono i $\frac{2}{3}$.

95. La divisione ha sempre per oggetto di trovare un numero che moltiplicato per il divisore riproduca il dividendo. Debba dividersi un numero qualunque per una frazione, per es. $\frac{3}{7}$. È chiaro che se

il dividendo si moltiplica prima per il divisore e poi per la frazione inversa del divisore, esso non cambia valore, perchè queste due operazioni producono lo stesso effetto che se si fosse moltiplicato il dividendo per 1. Ma si ha sempre lo stesso risultamento qualunque sia l'ordine con cui si eseguono le moltiplicazioni suddette, perciò se il dividendo si moltiplica per la frazione inversa del divisore si ha un numero che moltiplicato per il divisore riproduce il dividendo. Quello dunque sarà il quoziente; cioè il quoziente di un numero diviso per una frazione si ottiene moltiplicandolo per la frazione inversa del divisore. Così $\frac{2}{5}$ si divide per $\frac{3}{7}$ moltiplicandolo per $\frac{7}{3}$, cioè moltiplicando per 7 e dividendo per 3. D'altronde è chiaro che la divisione, essendo per definizione l'operazione inversa della moltiplicazione, si esegue anche con operazioni inverse; quindi se per moltiplicare un numero per una frazione, fa d'uopo moltiplicare per il numeratore e dividere per il denominatore, per dividere un numero per una frazione bisogna dividerlo per il numeratore e moltiplicarlo per il denominatore.

96. La divisione riducendosi alla moltiplicazione per il divisore inverso, dietro le regole della moltiplicazione si può stabilire quanto segue.

1° Un intero si divide per una frazione, dividendolo per il numeratore e moltiplicandolo per il denominatore. L'ordine di queste due operazioni è indifferente; ma quando il dividendo è divisibile per il numeratore si preferisce di far prima la divisione. Perciò

$$3 : \frac{5}{7} = 3 \times \frac{7}{5} = \frac{21}{5}, \quad 6 : \frac{3}{7} = \frac{6}{3} \times 7 = 14.$$

2° Una frazione si divide per un'altra o dividendo, quando è possibile, i termini del dividendo per i termini rispettivi del divisore, o pure moltiplicando i termini del dividendo per quelli del divisore inverso. Perciò $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$, $\frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{15}{14}$.

97. Da quanto si è detto rilevasi, che quando il divisore è una frazione, l'operazione riducesi a *formare il quoziente per mezzo del dividendo nella stessa maniera che l'unità si formerebbe per mezzo del divisore.* In effetti, siccome dal divisore si ottiene l'unità moltiplicandolo per la frazione inversa, anche il quoziente si otterrà dal dividendo moltiplicandolo per l'inverso del divisore.

Quindi se il divisore è minore di 1, la frazione inversa sarà maggiore di 1, e viceversa. Perciò il quoziente sarà maggiore o minore del dividendo secondo che il divisore è minore o maggiore di 1.

Quando il divisore è un numero intero, per es. 5, siccome l'unità è la quinta parte del divisore, il quoziente è la quinta parte del di-

vidėndo; allorchè poi il divisore è una frazione, per es. $\frac{2}{3}$, sarà il dividendo i $\frac{2}{3}$ del quoziente.

98. Si può la regola della divisione dimostrare, partendo dal principio che il quoziente non cambia, se si cambia l'unità del dividendo e del divisore, ossia se il dividendo e il divisore si moltiplicano per il medesimo numero. Or se si deve dividere $\frac{3}{7}$ per $\frac{2}{5}$, è chiaro che moltiplicando i due numeri per 5 il quoziente non varia; quindi la divisione di $\frac{3}{7}$ per $\frac{2}{5}$ corrisponde a quella di $\frac{15}{7}$ per 2; il che dimostra che $\frac{3}{7}$ si divide per $\frac{2}{5}$ moltiplicando per 5 e dividendo per 2.

99. Dalle cose esposte si ricavano molte conseguenze.

1° Ravvicinando le due operazioni, moltiplicazione e divisione, si vede che l'una si cangia nell'altra, invertendo il moltiplicatore in un caso e il divisore nell'altro.

2° Essendo $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2.\,7}{3.\,5} = \frac{7}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{5} : \frac{3}{2}$, si può nella divisione cambiare il dividendo in divisore, purchè si prendano le frazioni inverse. Con questa regola si ha subito $\frac{2}{3} : \frac{8}{9} = \frac{9}{8} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

3° Poichè $\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$, ne segue, che due frazioni che hanno lo stesso denominatore si dividono dividendo i numeratori.

4° Essendo $\frac{3}{5} : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = \frac{4}{5}$, due frazioni che hanno lo stesso numeratore si dividono dividendo il denominatore del divisore per quello del dividendo.

5° Essendo $\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{4}{5} \times 3$, si rileva che il quoziente di un prodotto diviso per un numero qualunque è uguale al quoziente di un fattore moltiplicato per l'altro fattore.

6° Essendo $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5 \times 2} = \frac{3}{2} : 5$, si ricava che tanto è dividere un numero per un altro e poi il quoziente per un altro numero, e così successivamente, quanto è dividerlo per il prodotto di tutti i divisori.

7° Parimente essendo $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 7}{5 \times 8} = \frac{3}{8} \times \frac{7}{5}$, ne segue che il prodotto de' quozienti è uguale al quoziente del prodotto de' dividendi diviso pel prodotto de' divisori.

100. Se si debbono moltiplicare o dividere interi uniti a frazioni, il mezzo che si presenta il primo è quello di ridurre l'intero e la frazione ad un sol numero frazionario, e allora l'operazione si eseguirà con la regola generale.

Parlando prima della divisione d'interi congiunti a frazioni, è da avvertirsi che se il divisore non è accompagnato da frazioni, è inu-

tile ridurre il dividendo a numero frazionario; imperocchè pervenuti all'ultimo resto, questo unito alla frazione che segue si convertirà in un sol numero frazionario, che si dividerà pel divisore. Si debba per es. dividere $488\frac{2}{3}$ per 23. Pervenuti all'ultimo resto 5, si convertirà questo in $\frac{15}{3}$ che unito a $\frac{2}{3}$ forma $\frac{17}{3}$, il qual numero frazionario diviso per 23 dà $\frac{17}{69}$, e si ha per quoziente $21\frac{17}{69}$.

$$\begin{array}{r|l} 488\frac{2}{3} & 23 \\ \cline{2-2} 28 & 21\frac{17}{69} \\ 5 & \\ \frac{17}{3} & \end{array}$$

101. Se poi anche il divisore è composto di un intero e di una frazione, basterà ridurre il solo divisore a un sol numero frazionario; poi sopprimendo il denominatore del divisore e moltiplicando il dividendo per questo denominatore, la divisione rientra nel caso precedente. Sia per es. da dividersi $5734\frac{3}{4}$ per $27\frac{2}{3}$. Ridotto il divisore a $\frac{83}{3}$, si moltiplicherà il dividendo per 3, il che darà $17204\frac{1}{4}$, da dividersi per 83. S'intenderà la ragione di questo modo di operare, osservando che in ogni divisione il divisore dovendo figurar da numero astratto, non deve contener parti riferite a diverse unità; e che essendo moltiplicato sì il dividendo come il divisore per 3, non si altera il quoziente (n° 46, V.).

102. Rispetto alla moltiplicazione d'interi uniti a frazioni si potrà seguire la regola generale. Si voglia per es. $137\frac{3}{4} \times 14\frac{2}{3}$ riducendo ciascun fattore ad un sol numero frazionario, si avrà $\frac{551}{4} \times \frac{44}{3} = \frac{24244}{12} = 2020\frac{1}{3}$.

È da osservarsi che l'operazione condotta innanzi nel modo indicato andrebbe in piena regola se il risultamento dovesse essere espresso sotto forma di frazione: in caso contrario vi è una parte di calcolo perduta. Si opera più speditamente e senza perder niuna parte del calcolo, regolando l'operazione nel modo che qui verrà spiegato.

103. Bisogna osservare che moltiplicare $137\frac{3}{4}$ per $14\frac{2}{3}$ significa ripeter 137 quattordici volte e poi prenderne una parte indicata da $\frac{2}{3}$; e come le due suddette operazioni si debbono eseguire sopra ciascuna parte del moltiplicando, l'operazione si riduce a moltiplicare 137 per 14, $\frac{3}{4}$ per 14, 137 per $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$.

Si può dunque eseguir la moltiplicazione d'interi uniti a frazioni moltiplicando prima gl'interi fra loro, poi la frazione di ciascun fat-

tore per la parte intera dell'altro fattore, e infine le frazioni fra loro. L'operazione si dispone come qui appresso.

		$137\frac{3}{4}$
		$14\frac{2}{3}$
prod. per	4	548
....	10	137
....	$\frac{3}{4}$	$10\frac{1}{2}$
......,	$\frac{2}{3}$	$91\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
		$2020\frac{\ }{3}$

La prima e la seconda linea sono il prodotto 137×14, la terza è $\frac{3}{4} \times 14$, la quarta è $137 \times \frac{2}{3}$. Riunendo questi diversi prodotti si ha il prodotto totale $2020\frac{1}{3}$.

Questo modo di operare riesce vantaggioso quando gl'interi sono numeri molto grandi. Si osservi però, che nel fare il prodotto di 137 per $\frac{2}{3}$ è stato d'uopo moltiplicare prima 137 per 2 e poi dividere questo prodotto per 3; parimente il prodotto di 14 per $\frac{3}{4}$ si è ottenuto moltiplicando 14 per 3 e dividendo il prodotto per 4. Queste operazioni, non potendo eseguirsi a mente, si dovranno fare in luogo separato.

104. Per proceder più brevemente e scrivere subito i prodotti parziali, converrà scomporre ciascuna frazione in altre che abbiano por numeratore l'unità. Così la frazione $\frac{3}{4}$ si può scomporre in $\frac{2}{4}$, più $\frac{1}{4}$, ossia $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$ si può scomporre in $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $\frac{5}{8}$ si scomporrà in $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{8}$ ossia in $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$; $\frac{13}{15}$ si può scomporre in $\frac{5}{15} + \frac{5}{15} + \frac{3}{15}$, che equivalgono a $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$; $\frac{14}{27}$ equivale a $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27}$; così per le altre frazioni. Per mezzo di queste scomposizioni i prodotti per le frazioni si riducono ad una divisione semplicissima, che può farsi mentalmente. Seguendo questo

metodo, l'operazione dell'esempio proposto si riduce a quella che si vede qui sotto.

$137\ \frac{3}{4}$

$14\ \frac{2}{3}$

548

137

prod. per $\frac{1}{2}$ 7

. . . . . $\frac{1}{4}$ . . . . 3 $\frac{1}{2}$ (si prende la metà del precedente)

. . . . . $\frac{1}{3}$ . . . . 45 $\frac{2}{3}$

. . . . . $\frac{1}{3}$ . . . . 45 $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$

$2020\ \frac{1}{3}$

Siccome $\frac{1}{3}$ non si può scomporre che in $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, si prenderà il prodotto di 137 per $\frac{1}{3}$, e questo si scriverà due volte.

Sia ancora quest'altro esempio.

$394\ \frac{5}{6}$

$58\ \frac{7}{8}$

3152

1970

prod. per $\frac{1}{2}$ 29

. . . . . $\frac{1}{3}$ . . . . 19 $\frac{1}{3}$

. . . . . $\frac{1}{2}$ 197

. . . . . $\frac{1}{4}$ . . . . 98 $\frac{1}{2}$

. . . . . $\frac{1}{8}$ . . . . 49 $\frac{1}{4}$

$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ . . . . $\frac{35}{48}$

$23245\ \frac{13}{16}$

Dopo aver fatto il prodotto di 394 per 58, si deve far quello di

58 per $\frac{5}{6}$. Or $\frac{5}{6}$ si può scomporre in $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$ che equivalgono a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$: si ottengono questi prodotti prendendo prima la metà , poi la terza parte di 58. In seguito scomponendo $\frac{7}{8}$ in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, si prende prima il prodotto di 391 per $\frac{1}{2}$, o (che è lo stosso) la metà di 394, e si ha 197 ; per prender poi il prodotto di 394 per $\frac{1}{4}$, basta prender la metà di 197 che è 98 $\frac{1}{2}$, e dividendo quest'ultimo numero per 2 si ottiene il prodotto di 394 per $\frac{1}{8}$, che è 49$\frac{1}{4}$. Allo stesso modo bisogna regolarsi in altri casi, e il metodo è conosciuto sotto il nome di *prendere in parti.*

105. La scomposizione di una frazione in altre che abbiano per numeratore l'unità è sempre possibile; ma per maggior facilità bisogna procurare che ciascun prodotto sia la metà , la terza parte , ec. del prodotto precedente. Questa scomposizione non deve praticarsi che quando i numeratori delle frazioni parziali ne' quali si scompone la frazione data sono diversi dall'unità ; in guisa che riesce inutile metterla in uso per le frazioni che hanno per denominatore un numero primo. Cosi per es. la frazione $\frac{6}{7}$ non si può scomporre che in $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\ldots$

In questo caso si potrà procedere nel modo che vien dichiarato nell'esempio seguente.

$548\frac{13}{24}$
$127\frac{6}{7}$
_____
2436
696
348

prod. per $\frac{1}{7}$ . . . . $49\frac{5}{7}$
. . . . . $\frac{5}{7}$ . . . .$248\frac{4}{7}$ (si moltiplica il precedente per 5)
. . . . . $\frac{1}{2}$ . . . . $63\frac{1}{2}$
. . . . . $\frac{4}{24}$ . . . . $21\frac{1}{6}$
. . . . . $\frac{1}{24}$ . . . . $5\frac{7}{24}$
$\frac{13}{28}$
_____
$44363\frac{13}{24}$

Dovendo moltiplicare 348 per $\frac{6}{7}$ si prende prima la 7ª parte di 348 che è $49\frac{5}{7}$. Si potrebbe scriver questo numero cinque altre volte di seguito, ma sarà più facile moltiplicarlo per 5 e scriverne immediatamente al di sotto il prodotto che è $248\frac{4}{7}$. In seguito dovendosi moltiplicare 127 per $\frac{13}{24}$, si scomporrà la frazione in $\frac{12}{24}$ e $\frac{1}{24}$; si troverà il prodotto per la prima, prendendo la metà di 127 che è $63\frac{1}{2}$; per aver quindi il prodotto per $\frac{1}{24}$ si dovrebbe prender la dodicesima parte di $63\frac{1}{2}$. Ma quando il divisore non è di una cifra le divisioni non possono più farsi a mente, e allora finisce il vantaggio del metodo. Si ricorre in questo caso ad un altro ripiego. Si prende prima il terzo di $63\frac{1}{2}$, e il quoziente ottenuto non dovendo esser compreso nella somma, si scriverà più in fuori o si segneranno con un tratto le sue cifre. Di questo numero si prende il quarto che è $5\frac{7}{24}$ e si avrà il prodotto per $\frac{1}{24}$. Allo stesso modo bisognerà regolarsi in altri casi. Questi prodotti che si cercano per render più facile l'operazione, si chiamano *prodotti ausiliari*.

ART. IV

Paragone fra i diversi sistemi di frazioni.

106. Le cifre decimali di un numero indicando parti dell'unità, potrebbero rappresentarsi secondo il sistema delle frazioni ordinarie. In effetti la frazione 0,457 equivale a $\frac{4}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}$. Le frazioni decimali si possono dunque far rientrare nella classe delle frazioni ordinarie; e quindi tutte le proprietà di queste ultime si debbono trovare avverate nelle prime.

Di fatto per sommar le tre frazioni suddette bisogna ridurle allo stesso denominatore, e osservando che il denominatore comune è 1000, si ridurranno a $\frac{400}{1000}+\frac{50}{1000}+\frac{7}{1000}$ che sommate danno $\frac{457}{1000}$ quanto appunto rappresenta la frazione 0,457. Dovendo moltiplicare 4,78 per 2,5, si avrà, secondo il sistema delle frazioni ordinarie, $\frac{478\times25}{100\times10}$; il che corrisponde a moltiplicare 4,78 per 2,5 come se la la virgola non vi fosse, e poi dividere per 100×10, ossia staccarne 4 cifre decimali. Lo stesso avviene per la divisione.

Le frazioni decimali però costituiscono un sistema particolare di frazioni, nel quale la legge di decremento dell'unità è costante; e sotto questo rappoorto le operazioni, e particolarmente la riduzione

allo stesso denominatore, si rendono estremamente più facili. Tale sarebbe pure il sistema delle frazioni

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \text{ec.}$$

le quali si possono subito ridurre al denominatore dell'infima specie. Ma fra tutti i sistemi di questa natura, il decimale dipendendo dal sistema di numerazione, rende inutili i denominatori, e la loro calcolazione rientra in quella degli interi. In questo precisamente consiste il loro principale vantaggio.

107. Una frazione, essendo una divisione indicata, si può convertire in decimali per mezzo della regola espressa al n° 52. Così si trova $\frac{1}{4}=0,25$, $\frac{5}{8}=0,625$. Se però si vuol ridurre $\frac{1}{7}$ a frazione decimale, si avrà per quoziente fino alla sesta divisone 0,142857. Arrivati a questo punto si trova per resto 1; ritorna in conseguen- il primo dividendo 10. Dovendo ricomparire i medesimi dividendi, le cifre del quoziente saranno sempre le stesse di quelle ottenute, per quanto si prolunghi la divisione. Quosto quoziente è dunque una frazione decimale che si compone sempre delle medesime cifre 142857, e che perciò chiamasi *periodica*. Le cifre che si ripetono fomano il *periodo*.

108. Una frazione ordinaria si potrà convertire in frazione decimale esatta, quando nella serie de' numeri 10, 100, 1000, 10000, ec. ve n'è uno che può esser diviso pel denominatore della frazione. In effetti moltiplicandosi il numeratore per uno di questi numeri, per es. per 1000, se il denominatore divide 1000, dividerà ancora i suoi moltiplici (n° 68). Ha luogo questo fatto quando il denominatore è composto de' soli fattori 2 e 5 che sono fattori di 10, 100, 1000, ec, (n° 67,3°).

In caso contrario la divisione deve necessariamente dare una frazione decimale periodica. Giacchè il resto dovendo esser minore del divisore, conviene, che dopo un certo numero di divisioni si ritròvi necessariamente uno de' resti precedenti. Allora i dividendi parziali si riprodurranno con lo stess'ordine, e si avranno le stesse cifre nel quoziente. Le cifre del periodo possono esser al più quante sono le unità del denominatore meno una, ma in molti casi sono in minor numero (V. nota al n° 75). Così $\frac{1}{13}$ convertito in decimali dà 0,076923076923 . . , $\frac{1}{11}$ dà 0,09 09 09 . . . . .

Trovato il periodo corrispondente ad una frazione che ha per numeratore l'unità le stesse cifre e con lo stesso ordine comporranno quello delle frazioni, il cui denominatore è uno de' resti ottenuto nella divisione, ma il periodo comincierà dalla cifra corrispondente al dato resto. Così essendo $\frac{1}{7}= 0,142857$ . . . sarà $\frac{4}{7}=0,571428$ . .

109. Siccome una frazione si converte in decimi, centesimi, ec. moltiplicando il suo numeratore per 10, 100, ec., si può con un metodo analogo convertire una frazione in un' altra di una specie data. Se per es. la frazione $\frac{5}{8}$ si vuol convertire in 13^{esimi}, si moltiplicherà 13 per 5 e si dividerà questo prodotto per 8. Il quoziente essendo 8, si avrà la frazione $\frac{8}{13}$ che differisce dalla data per meno di $\frac{1}{13}$.

Per convertire la frazione $\frac{5}{8}$ esattamente in un'altra di una specie data, è necessario che il nuovo denominatore sia divisibile per 8 cioe dev'esser moltiplice di 8. Ma questa frazione non può conservar lo stesso valore se non moltiplicando i suoi termini per un medesimo numero; perciò una frazione irriducibile non può esser eguale ad un'altra frazione, se i termini della seconda non sono egualmente moltiplici de' termini della prima.

110. Del pari che una frazione ordinaria si può convertire in decimale, si può una frazione decimale convertire in frazione comune.

1° Se la frazione è terminata, si scriverà sotto la forma di frazione ordinaria, e poi si ridurrà alla più semplice espressione. Così la frazione 0,625 è uguale a $\frac{625}{1000}$; e ridotta ad espressione più semplice, dividendo i suoi termini tre volte per 5, dà $\frac{5}{8}$.

2° Quando la frazione decimale è periodica, si può anche trovare la frazione ordinaria generatrice. A tal uopo bisogna osservare che $\frac{1}{9} = 0,11111\ldots$, $\frac{1}{99} = 0,010101\ldots$, $\frac{1}{999} = 0,001001001\ldots$, ec. Quindi sarà

$$0,33\,33\ldots\ldots = 3 \times 0,1111\ldots = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9},$$

$$0,27\,27\ldots\ldots = 27 \times 0,0101\ldots = 27 \times \frac{1}{99} = \frac{27}{99},$$

$$0,132\,132\ldots = 132 \times 0,001\,001\ldots = 132 \times \frac{1}{999} = \frac{132}{999}$$

È facile il conchiudere che ogni frazione decimale periodica è uguale ad una frazione ordinaria che ha per numeratore le cifre del periodo e per denominatore un numero composto di tanti 9 per quante posti occupa il periodo. Le frazioni trovate $\frac{3}{9}$, $\frac{27}{99}$, $\frac{132}{999}$ si riducono alla espressioni più semplici $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{44}{333}$ (n° 83).

3° Con la stessa facilità si trova la frazione generatrice, quando il periodo non comincia dalla prima crifa decimale. Sia per es. la frazione 0, 29 32 32 . . . composta del periodo 32 e della parte non periodica 29. Moltiplicandola per 100, cioè passando la virgola dove comincia il periodo, si ha $29,32\,32\ldots = 29\,\frac{32}{99}$. Dividendo nuova-

vamente per 100, si ha $\frac{29}{100}+\frac{32}{9900}=\frac{2871+32}{9900}=\frac{2903}{9900}$.

111. Per ben intender la natura delle frazioni decimali periodiche si consideri la frazione 0,99999 . . , , che secondo la regola è uguale a $\frac{9}{9}=1$. Sembra a prima vista assurdo, che una frazione sia eguale a un intero. Si rifletta però che se nella frazione 0,9999 .... ci arrestiamo alla prima cifra, la differenza dall'unità sarà $\frac{1}{10}$; se alla seconda cifra, è $\frac{1}{100}$; se alla terza, $\frac{1}{1000}$; se alla quarta, $\frac{1}{10000}$; e così di seguito. Si vede adunque che la frazione 0,999 . . . tanto più si avvicina a 1 quanto più si estende. Nondimeno, qualunque sia il numero delle cifre che si prenderanno, non potrà mai aversi esattamente l'unità. L'unità dunque è una quantità verso la quale la frazione 0,9999. .. si va sempre più avvicinando senza potervi mai arrivare, e perciò n'è il *limite*. Per esprimere l'impossibilità di assegnare il numero delle cifre che si dovrebbero prendere per formare l'unità, si dice che questo numero di cifre dev'esser *infinito*; secondo questo linguaggio la frazione 0,9999 . . . prolungata all'infinito è uguale a 1. La differenza fra l'unità e la frazione diviene allora tanto piccola da non potersi assegnare, il che si esprime col dir che questa differenza diviene *infinitesima*. La stessa idea bisogna formarsi delle altre frazioni decimali periodiche: le frazioni ordinarie corrispondenti sono i limiti verso i quali esse frazioni convergono, ossia sono i numeri, cui i loro valori tendono a divenir eguali.

CAPO IV.

DE' NUMERI COMPLESSI

112. I metodi finora dati per eseguir le quattro operazioni su i numeri interi o frazionari sono indipendenti dalla specie dell'unità di cui questi numeri rappresentano le collezioni. Ma ogni calcolo da eseguirsi avendo relazione ad una quistione determinata, il risultamento che si cerca ha spesso una dipendenza necessaria colla specie dell'unità de' numeri su i quali deve operarsi. Ora se per le diverse specie di quantità da misurarsi le suddivisioni o i moltiplici dell' unità principale seguissero il sistema di numerazione, il calcolo dei numeri concreti rientrerebbe in quello de' numeri interi ed astratti, e sarebbe perciò il più facile di tutti. Ma ciò non sempre s'incontra, trovandosi le diverse specie di unità ora divise in 12 parti, ora in 8, ora in 16, ec.

I numeri concreti ne' quali le suddivisioni dell'unità principale non seguono il sistema decimale, si chiamano *numeri complessi*.

113. Prima di parlare del calcolo de' numeri complessi, enuncieremo le suddivisioni di quelle misure, delle quali avremo a far uso negli esempi.

Il *tempo* generalmente si misura dividendo il giorno in 24 ore, l'ora in 60 minuti primi, il minuto primo in 60 secondi. I minuti primi s'indicano con un accento, i secondi con due. Per indicare 3 ore, 17 min. primi e 13 secondi si scrive $3^{or.}\ 17'\ 13''$,

Alcune misure antiche della Città di Napoli.

Misure di lunghezza. L'unità si chiama *palmo*, che si divideva in 12 *once* e l'oncia in 5 *minuti*. Otto palmi formavano una *canna*.

Pesi. L'unità si chiamava *libbra*; si divideva in 12 *once*, l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *trappesi*, il trappeso in 20 *acini o grani*. Per alcuni generi si adoperava il *rotolo* che equivale a once $33\frac{1}{3}$. Un peso di 100 rotoli si chiama *cantajo*.

L'unità monetaria è il *ducato*, che si divide in 100 *grani*, il grano 12 *cavalli*.

Alcune misure antiche di Parigi.

Misure di lunghezza. L'unità si chiama *tesa*; si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*.

Pesi. L'unità si chiamava *libbra*, che si divideva in 16 *once*, l'oncia

in 8 *grossi o dramme*, la dramma in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 24 *grani*.

L'antica unità di moneta si chiamava *lira*; si divideva in 20 *soldi*, e il soldo in 12 *denari*.

114. Il calcolo de' numeri complessi riesce facile a chi ha ben compreso lo spirito de' metodi nel calcolo de' decimali e delle frazioni. Non si tratta che di applicare i medesimi principii generali da cui quelle operazioni dipendono, e di estendere ad unità arbitrariamente suddivise, i metodi dati pel caso in cui l'unità sia divisa e suddivisa sempre in 10 parti.

ART. I.

Conversione de' numeri complessi.

115. Conoscendo in un numero complesso le suddivisioni dell'unità, sarà facile trovare quante unità di una specie data contiene l'unità principale. Infatti una tesa è sei piedi, e poichè 1 piede è 12 pollici, la tesa sarà poll. $6 \times 12 = 72$; e siccome ogni pollice è 12 linee, sarà la tesa eguale a lin. $72 \times 12 = 864$ linee. Nel modo stesso si trova facilmente

$$1^{\text{can.}} = 8^{\text{pal.}} = 96^{\text{on.}} = 480^{\text{m.}}$$
$$1^{\text{lib.}} = 12^{\text{on.}} = 120^{\text{dr.}} = 360^{\text{trap.}} = 7200^{\text{gr.}}$$

116. Ogni numero complesso si può scrivere sotto la forma di frazione ordinaria. Sia per es. il numero $7^{\text{can.}}\ 3^{\text{pal.}}, 2^{\text{onc.}}\ 4^{\text{m.}}$ Conoscendo qual parte il palmo, l'oncia e il minuto è della canna, quel numero si potrà scrivere canne $7 + \frac{3}{8} + \frac{2}{96} + \frac{4}{480}$. Il denominatore 480 essendo divisibile per 8 e per 96, sarà 480 il denominatore comune delle tre frazioni, e si avrà

$$7 + \frac{3 \times 60 + 2 \times 5 + 4}{480}, \text{ ovvero } \frac{7 \times 480 + 3 \times 60 + 2 \times 5 + 4}{480} = \frac{3554}{480}.$$

Riducendo la frazione all'espressione più semplice, si avrà $7^{\text{can.}}\ 3^{\text{pal.}}\ 2^{\text{on.}}\ 4^{\text{m.}} = 7\frac{97}{240}$ canne; o pure, svolgendo la frazione medesima in decimali, il numero proposto potrà esprimersi per canne 7,4051515...

L'operazione precedente si rende di gran lunga più semplice, allorchè si comincia dalla frazione risultante dall'unità dell'infima specie, e questa si riduce in frazione della specie immediatamente superiore. È necessario di fare ogni volta le riduzioni delle frazioni alla più semplice espressione, affinchè l'ultima frazione riesca la più semplice possibile. Così nell'es. precedente si ha $2^{\text{on.}}\ 4^{\text{m.}} = 2\frac{4}{5}$ di oncia, ovvero $\frac{14}{5}$ di oncia; ma siccome un'oncia è $\frac{1}{12}$ del palmo, $\frac{14}{5}$ di oncia

sarà eguale a $\frac{14}{60}$ di palmo $= \frac{7}{30}$ di palmo. Quindi $3^{pal.} 2^{on.} 4^{m.} = 3\frac{7}{30}$ di palmo $= \frac{97}{30}$ di palmo, ovvero $\frac{97}{240}$ di canna, siccome si era trovato.

117. L'operazione necessaria a farsi per trasformare un numero complesso in frazione ordinaria serve anche per convertire questo numero in unità dell'infima specie. In effetti $\frac{3554}{480}$ di canna rappresenta evidentemente 3554 minuti.

Ma però l'operazione può essere resa più semplice, convertendo successivamente le unità di una data specie in quelle dell'ordine immediatamente inferiore, come si vede qui praticato sull'esempio del n° prec.

Si moltiplicano le 7 canne per 8 denominatore dell'unità immediatamente inferiore e si avrà 56 che esprime il numero de' palmi contenuto in 7 canne; e aggiuntovi 3 palmi, si avrà 59 palmi $= 7^{can.} 3^{pal.}$ Moltiplicando 59 per 12 si convertirà questo numero di palmi in once; e aggiunte al prodotto le due once date, si avrà $710^{onc.} = 7^{can.} 2^{m.}$ Moltiplicando 710 per 5, si convertiranno le once in minuti che coi 4 minuti dati formeranno 3554 minuti.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 8 \\ \hline 56 \\ 3 \\ \hline 59 \\ 12 \\ \hline 118 \\ 59 \\ \hline 708 \\ 2 \\ \hline 710 \\ 5 \\ \hline 3550 \\ 4 \\ \hline 3554 \end{array}$$

Sia dato il numero $2^{tes.} 5^{pie.} 4^{pol.} 3^{lin.}$ da ridursi a linee. Si farà l'operazione posta a lato, e si troverà il numero espresso in linee ed eguale a 2499 linee. Volendo esprimere lo stesso numero in frazione, conoscendo che la linea è $\frac{1}{864}$ della tesa, sarà

$$2^{tes.}\ 5^{pie.}\ 4^{pol.}\ 3^{lin.} = \text{tese}\ \frac{2499}{864} = 2\,\frac{771}{864} = 2\,\frac{257}{288}.$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ \hline 12 \\ 5 \\ \hline 17 \\ 12 \\ \hline 34 \\ 17 \\ 4 \\ \hline 208 \\ 12 \\ \hline 416 \\ 208 \\ 3 \\ \hline 2499 \end{array}$$

Quel che si fa ne' numeri interi o decimali per ridurre tutto il numero ad unità dell'infima specie non è che un caso particolare del precedente. Per es. il numero 3785 esprime 3migl. 7centin. 8diec., 5un. Se si moltiplicano le migliaia per 10, si ridurranno a 30 centinaja, che colle 7 centinaja formano 37 centinaja. Moltiplicate queste nuovamente per 10, si convertono in 370 diecine, che colle 8 diecine date formano 378 diecine. In fine moltiplicando nuovamente per 10 e aggiungendo le 4 unità, si ha il numero stesso convertito in 3784 unità. Il metodo adunque è lo stesso; ma in quest'ultimo caso le conversioni si fanno senza effettuare operazione, perchè la moltiplicazione dipende dalla sola situazione delle cifre.

118. L'indicato modo di operare risulta ancor più evidente, osservando che nell'esempio del n° 116 il numero 3554 si ottiene effettuando le qui indicate operazioni: $7 \times 480 + 3 \times 60 + 9 \times 5 + 4$ le quali si scompongono in operazioni più semplici, cioè $7 \times 8 \times 12 \times 5 + 3 \times 12 \times 5 + 2 \times 5 + 4$. Ora è chiaro che dividendo quest'ultimo numero per 5 si ha per resto 4 e per quoziente $7 \times 8 \times 12 + 3 \times 12 + 2$; dividendo questo quoziente per 12 si ha per resto 2 e per quoziente $7 \times 8 + 3$; e dividendo quest'ultimo numero per 8, si ha per resto 3 e per quoziente 7. Facendo l'operazione inversa, si hanno i numeri $7 \times 8 + 3$, $7 \times 8 \times 12 + 3 \times 12 + 2$, $7 \times 8 \times 12 \times 5 + 3 \times 12 \times 5 + 2 \times 5 + 4$ l'ultimo de' quali è il numero richiesto, cioè 3554.

119. Sul numero 3554, che rappresenta minuti, eseguendo operazioni inverse alle precedenti, il medesimo si convertirà in once, palmi, canne. Si dividerà perciò prima per 5, denominatore de' minuti riferito all'unità immediatamente superiore cioè all'once, e si avrà il quoziente 710 e il resto 4; e sarà 3554 minuti = 710onc. 4m. Si dividerà il quoziente 710 per 12, denominatore delle once rispetto ai palmi, e si avrà il quoziente 59 e il resto 2; sarà quindi 3554m. = 59pal. 2onc. 4m. Dividendo in fine 59 per 8 si avrà il quoziente 7 e il resto 3; per cui 3554m. = 7can. 3pal. 2onc. 4m. L'operazione si disporrà come qui appresso.

```
3554 | 5
   4 | 710 | 12
       110 | 59 | 8
         2 |  3 | 7
```

Si scriverà l'ultimo quoziente e i resti successivi, ma presi in ordine retrogrado; e si darà a ciascuno la denominazione che gli compete secondo l'ordine di successione.

Parimente, se il numero 34798 grani (misura di Parigi) si voglia convertire in numero complesso, si farà l'operazione qui scritta.

34798	24			
107	1449	3		
119	24	483	8	
238	9	3	60	16
22	0		12	3

L'ultimo quoziente è 3, e i resti sono 12, 3, 0, 22; per cui il numero 34798 grani $= 3^{lib.}\ 12^{onc.}\ 3^{dr.}\ 0^{scr.}\ 22^{gr.}$

Così si ha pure

$$12^{lir.}\ 14^{sol.}\ 7^{den.} = 3055 \text{ denari} = \frac{3055}{240} \text{ lire} = \frac{611}{48} \text{ lire} = 12\frac{35}{48};$$

$$284341'' = 3^{g.}\ 7^{or.}\ 2'\ 21''.$$

120. Si debba ora convertire in numero complesso un numero frazionario dell'infima specie, come per esempio $\frac{3178481''}{13}$. Estraendo da questo numero gl'interi cioè dividendo 3178481 per 13, si avrà $244498''\frac{7}{13}$. Si tratterà ora di convertire 244498'' in minuti primi, ore e giorni, secondo la regola assegnata, cioè dividendo il detto numero per 60, poi il nuovo quoziente per 60, poi l'altro per 24. Si vede dunque che il divisore 13 si può considerare come formante parte della serie de' divisiori, e quindi l'operazione è uniforme. Il primo resto è il numeratore della frazione che deve accompagnare il numero dell'infima specie. Ecco il quadro dell'operazione:

3178481''	13			
57	244498''	60		
58	449	4074	60	
64	298	474	67or.	24
128	58''	54'	19or.	2g.
111				
7				

e perciò

$$\frac{3178481''}{13} = 2^{g.}\ 19^{or.}\ 54'\ 58''\ \frac{7}{13}$$

121. Un numero concreto espresso in frazione ordinaria e rapportato all'unità principale, si voglia convertire in numero complesso. Si abbia per es. il numero: canne $3\frac{3}{7}$ e si voglia la frazione $\frac{3}{7}$ esprimere in palmi, canne e minuti. Bisogna in primo luogo convertirla in minuti, e siccome il minuto è $\frac{1}{480}$ della canna, quella

frazione sarà eguale a minuti $\frac{480\times3}{7}$ cioè $\frac{1440}{7}$ di minuto. Si tratterà colla regola precedente di esprimere in numero complesso il quoziente di 1440min. diviso per 7; il quale sarà $3^{pal.}\ 5^{onc.}\ 0^{m.}\ \frac{5}{7}$.

In vece di convertire la frazione di canna $\frac{3}{7}$ immediatamente in minuti, e poi da' minuti ripassare alle once e palmi, sarà più facile e più breve convertire la frazione $\frac{3}{7}$ in palmi moltiplicandola per 8. Si avrà così $\frac{3}{7}$ di canna eguale a $\frac{24}{7}$ di palmo = pal. $3\frac{3}{7}$. Si convertirà questa frazione di palmo in once, moltiplicandola per 12, e sarà $\frac{3}{7}$ di palmo $=\frac{36}{7}$ di once = once $5\frac{1}{7}$. Convertendo finalmente $\frac{1}{7}$ di oncia in minuti, si avrà $\frac{1}{7}$ di oncia $= 0^{m.}\ \frac{5}{7}$. Dunque

$$\text{can. } 3\frac{3}{7} = 3^{can.}\ 3^{pal.}\ 5^{on.}\ 0^{min.}\ \frac{5}{7};$$

risultamento identico al precedente. È facile ravvicinare questi due modi di operare.

Parimente nel numero $13^{tese},457$ si esprimerà la frazione decimale per mezzo delle suddivisioni della tesa operando come si vede scritto.

```
0,457        0,742        0,904
    6           12           12
-----        -----        ------
2,742        1 484         1 808
             7 42          9 04
             -----        ------
             8,904        10,848
```

Sicchè sarà

$$13^{tes.},437 = 13^{tes.}\ 2^{pied.}\ 8^{pol.}\ 10^{lin.},848.$$

A R T. II.

Operazioni su i numeri complessi.

§. I. *Addizione e sottrazione.*

122. L'addizione de' numeri complessi si esegue scrivendo le une sotto sotto le altre le unità della medesima denominazione; e poi, cominciando dalle unità dell'infima spesie, si faranno tante somme parziali, quante sono le specie di unità delle quali si compongono i numeri dati. Se le somme parziali non contengono tante unità quante ne bisognano per formare una o più unità dell'ordine che segue immediatamente, si scriveranno nel luogo della somma; in caso

diverso, si divideranno pel loro denominatore, si scriverà il resto e il quoziente si riporterà alla colonna seguente. A schiarimento di quanto si è detto si guardi l'esempio che segue.

La somma delle linee è 32; e siccome 32 linee equivalgono a $\frac{32}{12}$ di pollici, si scriverà il resto 8, e il quoziente 2 si riporterà alla colonna de' pollici. La somma de' pollici è 31; siccome 31 pollici sono uguali a $\frac{31}{12}$ di piede, si dividerà 31 per 12, il resto 7 si scrive e il quoziente 2 si riporterà alla colonna seguente. E così di seguito.

5tes.	3pi.	3pol.	2lin.
2	5	7	11
6	1	10	11
3	6	9	8
18tes.	5pi.	7pol.	8lin.

Ecco altri esempi per esercizio.

7can.	4pal.	0on.	2m.	$\frac{1}{3}$
5	3	11	3	$\frac{5}{6}$
2	7	9	1	
8	6	3	4	$\frac{2}{3}$
24can.	6pal.	1onc.	1m.	$\frac{5}{6}$

18gio.	3or.	16′	39″
2	14	18	19
13	23	7	59
4	22	59	47
39gio.	13or.	42′	44″

123. La sottrazione parimente non ammette difficoltà, giacchè trattasi di eseguirla sopra le unità del medesimo nome. Se qualche sottrazione parziale fosse impossibile perchè il numero superiore è minore dell'inferiore, si staccherà un'unità da quelle dell'ordine che segue immediatamente. Ecco un esempio.

Da 6 once non potendosi sottrarre 11 once, si prenderà in prestito 1 palmo, che si converte in 12 once, e si farà la sottrazione togliendo 11 da 18; e così di seguito. Per render la sottrazione possibile, si viene a scomporre il numero superiore in 11can. 12pal. 18on. 4m. Ecco per maggior dilucidazione un altro esempio.

12can.	5pal.	6on.	4mi.
2	7	11	3
9can.	5pal.	7on.	1mi.

7lib.	0on.	0gro.	2scr.	13ac.
2	15	7	2	23
4	0	0	2	14

Del modo come l'operazione è eseguita si troverà la ragione, osservando che il numero superiore si è scomposto in 6lib. 15on. 7gro. 4scr. 37acin.

§ II. *Moltiplicazione e divisione.*

124. Si consideri in primo luogo il caso in cui si debba dividere un numero complesso per un numero intero ed astratto; e per poter ragionare si prenda il numero (mis. di Napoli) $2138^{lib.}$ $7^{on.}$ $4^{dr.}$ $1^{trap.}$ $15^{gr.}$ da dividersi per 124.

La prima idea che si presenta è forse quella di convertire il dividendo in unità dell'infima specie, cioè in grani (n° 117); e allora questa divisione rientra nel caso del n° 119. Ma trattandosi di avere il quoziente in numero complesso, col distruggere questo carattere nel dividendo non si farebbe che allungare considerevolmente il calcolo. Si comincerà perciò a dividere il numero della specie più alta, e poi si prosegue l'operazione convertendo il resto in unità della specie che segue, e questo numero sommato con quello della stessa specie che sta nel dividendo, sarà il secondo dividendo parziale. E così si continuerà. Se il numero della specie più alta fosse minore del divisore, si convertirà in unità della specie immediatamente inferiore; e se qualche dividendo parziale fosse minore del divisore, si scriverà 0 nel quoziente, e si passerà innanzi considerandolo come resto. Può conoscersi il modo come bisogna condurre il calcolo, osservando l'operazione che segue, effettuata sull'esempio proposto.

1°div. $2138^{lib.}$ $7^{on.}$ $4^{dr.}$ $1^{trap.}$ $15^{gr.}$	124
898	$17^{lib.}$ $2^{on.}$ $9^{dr.}$ $1^{tr.}$ $18^{gr.}\frac{3}{21}$
$30^{lib.}$
12
360
7
2°div. $367^{on.}$
3°div. $1194^{dr.}$
$78^{dr.}$
3
234
1
4°div. $235^{tr.}$
$111^{tr.}$
20
2220
15
5°div. $2235^{gr.}$
995
$3^{gr.}$

Dopo aver diviso 2138 per 124 si ha il resto 30 libbre. Si convertono le libbre in once moltiplicandole per 12, il che dà 360 once, che colle 7 once date nel dividendo formano 367 once. Divise queste per 124 danno per resto 119. Si converte questo numero di once in dramme; e siccome l'oncia si divide in 10 dramme, basterà calare il 4 del dividendo, e si ha 1194 dramme, che divise per 124 danno per resto 78, che si converte in trappesi moltiplicandolo per 3; e così di seguito.

Se il numero da dividersi fosse solamente $2138^{lib.}$, l'operazione così eseguita coinciderebbe con quella del n° 120.

La divisione de' numeri interi e decimali non è che un caso particolare del precedente. Ogni resto si converte in unità dell'ordine immediatamente inferiore, e vi si aggiungono le unità dell'ordine immediatamente superiore: ma ne' numeri scritti secondo il sistema di numerazione, la moltiplicazione per 10 e l'addizione della cifra seguente si fa col solo calare della cifra stessa.

125. Si può moltiplicare un numero complesso per un numero

intero ed astratto procedendo con operazioni inverse a quelle effettuate per la divisione. Sia per es. da moltiplicarsi 13can. 7pal. 3on. 2m.$\frac{2}{3}$ per 25 ; si disporrà l'operazione come si vede qui appresso.

	13can.	7 pal.	3onc.	2m.$\frac{2}{3}$
	25			
	65can.			
	26			
per 7 palmi...........	21	7pal.		
per 3 once...........		6	3onc.	
per 2 minuti.........			10	
per 2 terzi di min..			3	1m.$\frac{2}{3}$
	347can.	6pal.	4onc.	1m.$\frac{2}{3}$

Dopo aver moltiplicato 13 per 25, si moltiplicherà 7 per 25, il che dà 175 palmi; dividendo per 8 si ha 21c. 7pal. Si moltiplicherà in seguito 3on. per 25 e si avrà 75 once, e dividendo per 12 si avrà 6pal. 2on. E così si continuerà. Questi prodotti parziali si trovano in luogo separato, e poi si scrivono nel sito proprio a ciascuno.

Si potrebbe anche ridurre il moltiplicando ad unità dell'infima specie e moltiplicarlo poscia per 25. Il prodotto ottenuto si convertirebbe nuovamente in numero complesso, giusta il metodo esposto al n° 119.

126. Avendo mostrato come si esegua la moltiplicazione e la divisione di un numero complesso per un numero astratto, passiamo al caso in cui il moltiplicatore o il divisore sieno anche numeri complessi.

E cominciando dalla moltiplicazione, si osserverà che trattandosi di comporre un numero per mezzo del moltiplicando come il moltiplicatore è composto per mezzo dell'unità (n° 93), il moltiplicatore deve figurar sempre da numero astratto, e il prodotto dev'esser della stessa natura del moltiplicando. Si tratterà dunque di mostrare come si riduce il moltiplicatore a numero astratto. Intanto è d'uopo avvertire che non è indifferente, come ne' numeri astratti, prender per moltiplicando uno qualunque de' due fattori. L'enunciato della quistione, determinando la natura del prodotto, indica quale de' due fattori dev'esser preso per moltiplicando.

Si domandi l'importo di 24tese 5pi. 7pol. di un dato lavoro, pagandosi a 15lir. 7sol. 2den. la tesa. Il numero che si cerca dovendo esser espresso in lire, è chiaro che 15lir. 7sol. 2den. dev'esser il moltiplicando. E siccome il moltiplicatore deve figurar da numero astratto, si tratterà di ripeter 15lir. 7sol. 2den. ventiquattro volte, e poi prenderne la stessa parte che 5pi. 7pol. è della tesa. Ora essendo 24tes. 5pi. 7pol. $= \frac{1795}{72}$ di tesa, si dovrà moltiplicare 15lir. 7sol. 2den. per $\frac{1795}{72}$,

il che si fa moltiplicando prima per 1795 e poi dividendo il prodotto per 72, o viceversa. Ecco l'operazione.

	15lir.	7sol.	2den.	
	1795			
	8975lir.			
	1795			
per 7 soldi.........	628	5sol.		
per 2 den..........	14	19	2den.	
Prodotto.............	27568lir.	4sol.	2den.	72
	596			382lir. 17sol. 10den. $\frac{1}{36}$
	208			
Resto in lire.......	64			
	20			
	1280			
	4			
	1284			
	564lir.			
Resto in soldi.....	50			
	12			
	720			
	2			
	722			
Resto in den......	2			

127. Se anche il moltiplicando si mettesse sotto forma di frazione, si tratterebbe di moltiplicar fra loro interi uniti a frazioni. Si può con molto vantaggio applicare a questo caso il metodo esposto al n° 104, scomponendo le parti frazionarie de' due fattori in frazioni che hanno per numeratore l'unità. Si riprenda l'esempio di sopra, affinchè il confronto de' due metodi dia maggiore risalto a quello che va ad esporsi.

	15lir.	7sol.	2den.	
	24tes.	5pie.	7pol.	
	60lir.			
	30			
per 5 soldi..........	6			
per 2 soldi..........	2	8sol		
per 2 denari........	0	4		
per 3 piedi..........	7	13	7den.	
per 2 piedi..........	5	2	4	$\frac{2}{3}$
per 6 pol............	1	5	7	$\frac{1}{6}$
per 1 pol............	0	4	3	$\frac{7}{36}$
	382lir.	17sol.	10den.	$\frac{1}{36}$

Dopo aver fatto il prodotto di 15 per 24, si deve moltiplicare 24 per 7 soldi. Si scomporrà questo numero in 5 soldi più 2 soldi; il prodotto di 24 per 1 lira sarebbe 24 lire, essendo 5 soldi la quarta parte di 1 lira, il prodotto sarà la quarta parte di 24lir. Parimente essendo 2 soldi la decima parte di 1 lira, si prenderà la 10a parte di 24, scomponendo questo numero secondo le suddivisioni della lira. Essendo 2 denari la dodicesima parte di 2 soldi, si avrà il prodotto di 24 per 2 danari, prendendo la dodicesima parte del prodotto precedente. Tutti questi prodotti parziali compongono il prodotto del moltiplicando per 24. Il prodotto del moltiplicando per 1, darebbe il moltiplicando; scomponendo 5 piedi in 3 piedi e 2 piedi, si otterranno questi due prodotti prendendo la metà e poi la terza parte del moltiplicando. Si scomporrà poi 7 pollici in 6 pollici più 1 poll.; e siccome 6 pollici sono la metà di un piede o la quarta parte di 2 piedi, si prenderà il quarto del prodotto precedente, e si avrà 1lir. 5sol. 7den. $\frac{1}{6}$
In fine la sesta parte di questo numero darà il prodotto per 1 pollice.

128. Se in vece della quistione or ora risoluta fosse data quest'altra: Con una lira si hanno 24tes. 5pi. 7pol. di lavoro, quanto se ne potrà avere con 15lir. 7sol. 2den? Bisogna pure moltiplicar fra loro questi due numeri, ma il prodotto dovendo esser espresso in tese, 15lir. 7sol. 2den. farà da moltiplicatore. Ecco l'operazione.

	24tes.	5pi.	7pol.		
	15lir.	7sol.	2den.		
	120tes.				
	24				
per 3 piedi............	7	3pi.			
per 2 piedi............	5	0			
per 6 pol..............	1	1	6pol.		
per 1 pol..............	0	1	3		
per 5 sol..............	6	1	4	9lin.	
per 1 sol..............	1	1	5	9	
per 1 sol..............	1	1	5	9	
per 2 den..............	0	1	2	11	$\frac{1}{2}$
	382tes.	5pie.	4pol.	2lin.	$\frac{1}{2}$

I prodotti ottenuti ne' due casi che si son considerati sembrano diversi, perchè contengono parti dell'unità diversamente divisa. Ma scrivendo queste parti sotto forma di frazione, si otterrà il riultamento unico $382\frac{1541}{1728}$.

129. Bisogna in queste operazioni procurare di scomporre in modo le frazioni dell'unità che le divisioni si faccian sempre per numeri di una sola cifra, affinchè si possano eseguire a mente. In caso con-

trario si farà uso di prodotti *ausiliari* (n°105). Ecco un esempio de' più complicati.

	47duc.	54gr.	
	3cant.	53rot.	19onc.
	142,	62	
per 50 rot..........	23,	77	
per 10 rot.......... . . . . : .	4,	75,	$4\frac{5}{4}$
per 2 rot..........	0,	95,	$0\frac{24}{25}$
per 1 rot..........	0,	47,	$6\frac{12}{25}$
per 3 rot..........	1,	42,	$7\frac{11}{25}$
per 10 once........	0,	14,	$2\frac{118}{125}$
per 5 once..........	0,	07,	$1\frac{59}{125}$
per 2 once..........	0,	02,	$10\frac{118}{625}$
per 2 once..........	0,	02,	$10\frac{118}{625}$
	168,	08,	$8\frac{146}{625}$

Si deve osservare che essendo il ducato diviso in 100 grani, si può considerare il moltiplicando come incomplesso; quindi si farà immediatamente il prodotto di 47,54 per 3. Quantunque i 53 rotoli sieno parti decimali del cantajo, non conviene moltiplicare 47,54 per 3,53, giacchè bisognerebbe staccar quattro citre decimali dal prodotto, e allora il grano resterebbe diviso in centesimi, mentre s'intende dividerlo in 12 cavalli. Diviso 53 rotoli in 50+2+1, si ottiene il prodotto per 50 rotoli prendendo la metà del moltiplicando; per aver quello di 2 rotoli bisogna ricorrere al prodotto ausiliario per 10 rotoli. Siccome un rotolo è uguale a once $33\frac{1}{3}$, tre rotoli formano 100 once; è necessario dunque il prodotto ausiliario di 3 rotoli o 100 once, il quale si ottiene sommando i prodotti di 2 rotoli e 1 rotolo. Prendendone la 10ª parte, si ha il prodotto per 10 once; e così pel resto.

Il metodo di *prendere in parti* si applica a qualunque caso della moltiplicazione de' numeri complessi; quindi anche a quello del n° 125.

130. Rimarrebbe a parlare del caso in cui il moltiplicando e il moltiplicatore sono numeri della stessa natura. Questo caso non si presenta che per le misure lineari. I due fattori debbono esser considerati entrambi come numeri astratti; si possono perciò ridurre a numeri frazionari, e il prodotto sarà anche un numero astratto. Questo prodotto però, rapportandosi ad un'unità dipendente da quella de' due fattori, può essere anche espresso per un numero complesso; ma per

far ciò è necessario conoscer la natura di quest'unità; della qual cosa se ne terrà proposito in seguito.

131. Nella divisione, trattasi di trovare un numero che moltiplicato per il divisore riproduca il dividendo.

Dovendosi dividere un numero complesso per un altro, si possono dar due casi; o che il dividendo e il divisore sieno di specie diversa, o della stessa specie.

Nel primo caso il divisore fa da moltiplicatore e il quoziente da moltiplicando; quindi il divisore deve figurare da numero astratto, e il quoziente sarà della stessa natura del dividendo. Or per far che il divisore figuri da numero astratto basta esprimerlo sotto forma di frazione; il che fatto si eseguirà l'operazione con la regola precedente.

Con $578^{lir.}$ $13^{sol.}$ $5^{den.}$ *si è ottenuto* $37^{tes.}$ $2^{pied.}$ $7^{pol.}$ $6^{lin.}$ *di un dato lavoro, si domanda quanto si è pagato per ogni tesa.*

È chiaro che se si conoscesse il prezzo di una tesa di lavoro, moltiplicandolo per $37^{tes.}$ $2^{pied.}$ $7^{poll.}$ $6^{lin.}$, si dovrebbe avere $578^{lir.}$ $13^{sol.}$ $3^{den.}$ Si troverà dunque il prezzo di una tesa di lavoro, dividendo $578^{lir.}$ $13^{sol.}$ $5^{den.}$ per $37^{tes.}$ $2^{pied.}$ $7^{poll.}$ $6^{lin.}$ Il quoziente dev'essere in lire, e perciò il divisore deve ridursi a numero astratto. Questo divisore, messo sotto forma di frazione, diverrà $\frac{32346}{864}=\frac{599}{16}$. Sicchè moltiplicando prima il dividendo per 16 e poi dividendo per 599, si avrà il quoziente richiesto. Ecco l'operazione

	$578^{lir.}$	$13^{sol.}$	$5^{den.}$	
	16			
	$3468^{lir.}$			
	578			
per 10 soldi............	8			
per 2 soldi.............	1	$12^{sol.}$		
per 1 soldo.............	0	16		
per 4 denari...........	0	5	$4^{den.}$	
per 1 denaro..........	0	1	4	
	$9258^{lir.}$	$14^{sol.}$	$8^{den.}$	599
	3268			
Resto in lire....	273			$15^{lir.}$ $9^{sol.}$ $1^{den.}\frac{405}{599}$
	20			
	5460			
	14			
	$5474^{sol.}$			
Resto in sol......	83			
	12			
	166			
	83			
	8			
	$1004^{den.}$			
Resto in den......	405			

Perciò il costo di una tesa sarà 15lir. 9sol. 1den. $\frac{405}{599}$.

Se poi con gli stessi dati si domanda quanto lavoro può aversi con 1 lira, bisogna divider 37tes. 2pied. 7poll. 5lin. per 578lir. 13sol. 5den. Operando come sopra, si ha per quoziente 4pol. 7lin. $\frac{124348}{138881}$.

132. Se il divisore è della stessa specie del dividendo, esso corrisponderà al moltiplicando, e quindi il quoziente può esser numero astratto o numero complesso di natura diversa. Nell'uno e nell'altro caso si ridurranno il divisore ed il dividendo ad unità dell'infima specie, ed in questo stato riportandosi essi alla stessa unità, si potranno considerare come numeri astratti; giacchè il nome o la grandezza dell'unità non influisce sul valore del quoziente (ni 38, 46). Con questa riduzione l'operazione è riportata ad una divisione ordinaria fra due numeri interi. Il quoziente, secondo richiede la quistione, o si lascerà sotto la forma di numero astratto, o si convertirà in numero complesso dandogli il nome che gli compete, ed esprimendo la frazione che lo accompagna in frazioni di una specie data.

Sia proposto il quesito seguente. *È necessario l'acquisto di* 378*can.* 7*pal.* 5*onc. di tela*; *ogni pezza forma* 8*c.* 2*p.* 5*onc.* 3*m.*; *si vuol sapere quante pezze bisogna prendere.* Evidentemente si tratterà di dividere il primo numero pel secondo; e il quoziente, esprimendo il numero delle pezze necessarie a formare il numero di canne richiesto, sarà numero astratto. Si riducono i due numeri a minuti, e si avrà 181885 da dividere per 3988. Il quoziente intero è 45; e il resto è 2425 minuti, ovvero 5c. 0p. 5onc. Quindi bisogneranno pezze 35 e altri 5c. 0p. 5onc. al di fuori.

181885	3988
22365	45
2425	

Altra quistione. *Una libbra di una data droga costa ducati* $2{,}43\frac{1}{2}$, *quante libbre della stessa droga si potranno comprare con ducati* 375,21? È chiaro che per avere il numero delle libbre richiesto, bisogna vedere di quante quantità eguali a $2{,}43\frac{1}{2}$ si compone 375,21. Si dovrà dunque dividere 375,21 per $2{,}43\frac{1}{2}$, o pure (sopprimendo in ciascuno la virgola e moltiplicando per 2) 75042 per 487, che si possono considerare come numeri astratti. Il quoziente astratto $154\frac{44}{487}$ indica quante volte bisogna ripeter 1 libbra. Ora, perchè il prodotto di 1 libbra per $154\frac{44}{487}$ è libbre $154\frac{44}{487}$, si tratterà di convertire la frazione $\frac{44}{487}$ in parti della libbra, operando secondo il metodo esposto ne' ni 113 e 116.

Si poteva da principio considerare il dividendo 75042 come libbre e dividerlo pel numero astratto 487. Ma allora il calcolo avrebbe avuto relazione alla quistione seguente. *Con duc.* $2{,}43\frac{1}{2}$ *si hanno lib-*

bre $375\frac{21}{100}$ *di una data droga, quante se ne potranno avere con* 1 *ducato?* Nell'uno e nell'altro caso si ottiene per quoziente complesso $154^{lib.}\,1^{on.}\,0^{dr.}\,2^{trap.}\,15^{gr.}\,\frac{215}{487}$.

Queste due quistioni danno il medesimo risultamento; e in effetti non differiscono fra loro, se non perchè nella prima il quoziente corrisponde al [moltiplicatore, nella seconda al moltiplicando; e si è già veduto (n° 128) che anche nella moltiplicazione de' numeri complessi si può invertire l'ordine de' fattori, purchè il prodotto sia espresso in numero incomplesso, come in questo caso è il dividendo.

Altra quistione. Per $7^{can.}\,3^{pal.}\,3^{onc.}\,4^{m.}$ *di un dato lavoro si è pagato* 1 *ducato, quanto deve pagarsi per* $313^{c.}\,3^{p.}\,2^{onc.}\,2^{m.}$? Riducendo i due numeri dati a minuti, si tratterà di dividere 150432 per 3559. Il quoziente sarà duc. $42{,}26\frac{2866}{3559}$.

CAPO V.

DELLA RIPRUOVA DELLE QUATTRO OPERAZIONI.

133. Nell'effettuare le quattro operazioni su i numeri, eseguendosi a mente una buona parte del calcolo necessario, è possibile commettere errori. Per assicurarsi se il risultamento ottenuto è esatto, conviene eseguire un'altra operazione che ne sia la pruova. È condizione essenziale però che questa seconda operazione sia più facile della prima; altrimenti si cadrà nel dubbio se l'errore è dell'operazione principale o della pruova.

Si può riveder l'addizione, ripetendola con altro ordine. Se per es. la prima volta si è eseguita sommando da sopra verso sotto, si potrà rifare andando da sotto verso sopra: sarà difficile allora incorrere nel medesimo equivoco. Si può anche, se i numeri sono molti, dividerli in diverse somme di quattro o cinque numeri l'una. Conviene anzi adottare fin da principio questo partito per non istancar la memoria.

La migliore pruova dell'addizione è quella di andar togliendo dalla somma ottenuta le diverse somme parziali di cui essa si compone, cominciando dall'unità dell'ordine più elevato. Se l'operazione è ben fatta, si deve avere per ultimo resto zero.

Nell'esempio qui annesso, si fa la somma delle migliaja che è 12; e siccome vi sono scritte 14 migliaja, da 14 si toglie 12 e si nota il resto 2 al di sotto. Questo resto si unisce come diecine alla cifra seguente, e si formano 29 centinaja. La somma delle centinaja è 27, che tolto da 29 dà per resto 2; si nota 2 al di sotto, e unito come diecine alla cifra seguente si forma il numero 28. Sommata la colonna seguente, ossia quella delle diecine, si ha 27, che tolto da 28 dà per resto 1. Unito l'1 alla cifra seguente si forma 17. Sommate le unità si ha pure 17: sicchè il resto è zero, e l'operazione è ben fatta.

$$\begin{array}{r} 3754 \\ 2698 \\ 3572 \\ \underline{4963} \\ 14987 \\ 2210 \end{array}$$

È facile estender questa pruova anche a' numeri complessi.

134. La pruova della sottrazione si fa facilmente, giacchè sommando il numero inferiore col resto si deve avere il numero più grande (n° 16).

135. La pruova della moltiplicazione si può fare dividendo il prodotto per uno de' fattori; se l'operazione è ben fatta, si deve aver per quoziente l'altro fattore. Parimente la pruova della divisione, si fa moltiplicando il quoziente pel divisore, e a questo prodotto aggiungendo il resto si deve avere il dividendo. Ma queste pruove man-

cherebbero della condizione accennata al n° 133. Bisogna dunque ricorrere ad un mezzo più semplice.

Per verificare la moltiplicazione, si potrà cambiare l'ordine dei fattori; o pure si moltiplicheranno i fattori stessi per numeri arbitrari, per es. uno per 2, l'altro per 3; il nuovo prodotto diviso per 6 dovrà essere eguale al prodotto prima ottenuto.

Parimente si può verificare la divisione moltiplicando il divisore e il dividendo per un medesimo numero; e ripetendo l'operazione, si dee trovare lo stesso quoziente.

136. Ma pe' numeri interi o decimali si può ricorrere per la moltiplicazione ad una pruova, che è fra tutte la più spedita. Si divida ciascun fattore per un numero qualunque, per es. per 7, e si notino i resti; si faccia il prodotto di questi resti, e si divida pure per 7; il resto di quest'ultima divisione dev'esser uguale al resto che dà il prodotto totale diviso per 7 (n° 71).

L'operazione si dispone nel seguente modo.

```
  5431      6 | 4
    52     ---|---
 -----      3 | 4
 10862
27155
------
282412
```

Si segna una croce; si divide il primo fattore per un numero qualunque, per es. per 7, e si nota il resto 6 nel primo luogo; si divide l'altro fattore per 7, e si nota il resto 3; si fa il prodotto de' due resti 6 e 3, il quale diviso per 7 dà per resto 4, che si nota in terzo luogo; se l'operazione è ben fatta, il prodotto diviso per 7 deve dare per resto 4.

Fra i numeri da scegliersi per divisori, bisogna rifiutare il 2 e il 5; giacchè i resti che lasciano questi numeri non dipendendo che dalla sola ultima cifra (n° 73,), la pruova sarebbe di niun conto. Converrà però preferire il 9, perchè il resto si ha togliendo il 9 dalla somma dalle cifre (n° 69). Ripetendo la pruova col 9 nell'esempio di sopra, si hanno subito i resti 4, 7, 1.

```
 4 | 1
---|---
 7 | 1
```

Questa chiamasi la pruova del 9. Essa non è interamente sicura, giacchè trasponendo le cifre di un numero, scrivendo zero in vece di 9, o viceversa si ha lo stesso resto; per conseguenza può il prodotto esser erroneo e la regola non annunziarlo. Ma errori che si compensino in tal modo sono così difficili ad aver luogo, che veramente si può far uso della regola con tutta la confidenza. D'altronde il solo numero

9 è quello che riunisce alla massima brevità dell'operazione una grande sicurezza.

Se la pruova annunzia di essersi sbagliato, si può ripetere sopra ciascun prodotto parziale per vedere quale di questi è erroneo.

Facendo uso del numero 11, il quale dà il resto sottraendo dalla somma delle cifre di posto impari quella delle cifre di posto pari (n° 77), si ha maggior sicurezza, ma l'operazione è più lunga.

Qualunque sia il numero che si scelga, non si può mai con questa pruova esser pienamente sicuro di non aver errato. Imperocchè, trattandosi di trovare il resto e non il quoziente, un numero, anche sotto date condizioni, può variare in moltissime maniere e dar sempre il medesimo resto (n° 75).

137. È facile applicare la regola del 9 alla divisione. Il seguente esempio potrà servire di norma.

Dividendo	Divisore / Quoziente		
394789	534	3	3
2098	739	1	3
4969			
163			

Si sommano le cifre del divisore, si tolgono i 9 e si nota il resto 3; si fa lo stesso col quoziente; si fa il prodotto de' due resti 3 e 1, che è 3. Poi dalla somma delle cifre del dividendo togliendo i 9 e le cifre del resto della divisione, se l'operazione è ben fatta, si deve avere per resto 3.

CAPO VI.

DE' DIFFERENTI SISTEMI DI NUMERAZIONE.

138. Se in un numero complesso le suddivisioni dell'unità principale seguissero un sistema uniforme, sì la loro riduzione ad unità dell'infima specie, che le operazioni sarebbero più facili. Suppongasi per es. che la libbra fosse divisa in 8 once, l'oncia in 8 dramme, la dramma in 8 trappesi, il trappeso in 8 acini; il numero $3^{\text{lib.}}$ $4^{\text{on.}}$ $7^{\text{dr.}}$ $5^{\text{tr.}}$ $2^{\text{ac.}}$ si ridurrebbe ad unità dell'infima specie con una operazione uniforme, cioè moltiplicando la prima cifra a sinistra per 8 e poi aggiungendo la cifra seguente; moltiplicando questa somma per 8 e aggiungendo la terza cifra; e così moltiplicando sempre per 8 e aggiungendo la cifra che segue, si riduce quel numero a 14826 acini. Parimente se nella stessa ipotesi si avesse il numero 8398 acini e si volesse convertire in numero complesso, bisognerebbe eseguire l'operazione del n° 119, dividendo però sempre per 8; e si avrebbe il numero complesso $2^{\text{lib.}}$ $0^{\text{onc.}}$ $3^{\text{dr.}}$ $1^{\text{tr.}}$ $6^{\text{ac.}}$

Or se si stabilisse che le cifre acquistassero un valore otto volte più grande a misura che si trovano avanzate di un posto verso la sinistra in vece di dieci volte come è l'attuale sistema di numerazione, il numero complesso $3^{\text{lib.}}$ $4^{\text{on.}}$ $7^{\text{dr.}}$ $5^{\text{tr.}}$ $2^{\text{ac.}}$ per rappresentare unità dell'infima specie si potrebbe scrivere (34752), del pari che 3^{migliaja} $7^{\text{centin.}}$ $2^{\text{diec.}}$ $4^{\text{unità}}$ si esprimono per mezzo di 3724 unità. Lasciando allora i nomi particolari delle misure, l'ordine dell'unità sarà indicato dal posto delle cifre. Quindi nel numero (75426), la prima cifra a destra indica unità semplici; la seconda rappresenta collezioni di unità otto volte più grandi della prima o del secondo ordine; la terza cifra, collezioni di unità otto volte più grandi della precedente, ovvero unità del terz'ordine; e così di seguito. È chiaro in questo caso che il numero 8, formando un'unità del second' ordine, sarà rappresentato dall'unità scritta al secondo posto cioè da (10). Perciò i caratteri necessari per scrivere tutt'i numeri in questo sistema sono 8 solamente, cioè, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; e questo numero 8 è la *base* del sistema. Parimente convenendo che il valore delle cifre divenisse di 12 in 12 volte più grande per ogni posto che queste avanzano verso la sinistra, vi bisognerebbero 12 caratteri per scrivere tutti i numeri possibili, cioè i primi dieci conosciuti e due altri nuovi per rappresentare 10 e 11. Per far uso di questo sistema negli esempi, saranno dinotate queste due altre cifre per α e β.

Il numero (34752) *base* 8 non è che il numero complesso di una specie data 3, 4, 7, 5, 2, in cui si prende per unità principale quella dell'infima specie. Riducendo questo numero ad unità dell'infima specie, si ha 14826. I due numeri (34752) e 14826 son dunque eguali, e si rapportano ad unità della stessa grandezza, ma

'uno è scritto nel sistema a base 8, l'altro nel sistema ordinario.

139. Da ciò risulta, che per scrivere nel sistema ordinario un numero che si trova scritto in un altro sistema o viceversa, bisogna eseguire la stessa operazione che si farebbe sopra un numero complesso, o per ridurlo ad unità dell'infima specie, o per ripassare dalle unità dell'infima specie alle unità de' diversi ordini (n° 110).

Dunque per tradurre un numero dal sistema decimale ad un altro sistema bisogna divider questo numero per la nuova base, poi il quoziente per la stessa base, e il nuovo quoziente per la base, e così continuare fino a che si arrivi a un quoziente minore della base. I resti, scritti da destra verso sinistra secondo l'ordine con cui si sono ottenuti e seguiti dall'ultimo quoziente, formeranno il numero richiesto.

Si voglia per es. tradurre il numero 5953 in un altro a base 6. Ecco il quadro delle operazioni.

```
5953 | 6
  53 | 992 | 6
  13 |  39 | 165 | 6
   1 |  32 |  45 | 27 | 6
     |   2 |   3 |  3 | 4
```

Sicchè sarà 5953 = (43321) *base* 6.

Parimente si trova

$$1374 = (20444)\ \textit{base}\ 5\ ,$$

$$137893 = (21000011020)\ \textit{base}\ 3\ ,$$

$$17453 = (12129)\ \textit{base}\ 11.$$

Viceversa, se un numero scritto in un sistema qualunque si vuol tradurre nel sistema decimale, si moltiplicherà la prima cifra (a sinistra) per la base, e si aggiungerà la cifra seguente; questa somma si moltiplicherà nuovamente per la base, e si aggiungerà l'altra cifra; e così si continuerà finchè all'ultimo prodotto si aggiunga l'ultima cifra.

Quando la base del sistema è di una sola cifra, l'operazione del n° 117 riesce più semplice; giacchè scritto una sola volta il moltiplicatore, si possono senza stento trovare i prodotti successivi, avendo cura, mentre si fa la moltiplicazione, di aumentarli del valor della cifra che segue quella già adoperata. L'annesso esempio, nel quale trattasi di tradurre nel sistema ordinario il numero (63504) *base* 7, e le indicazioni poste a lato mostrano abbastanza come bisogna in simili casi regolarsi. Fatta l'operazione, si ottiene (63504) *base* 7 = 15684.

```
63504
7
-----
45    =    6×7+3
320   =   45×7+5
2240  =  320×7+0
15684 = 2240×7+4
```

Così pure si ha

$$(57326)\ \textit{base}\ 8 = 24278\,,$$

$$(3660482)\ \textit{base}\ 9 = 1988381\,,$$

$$(47\alpha 9\beta 05)\ \textit{base}\ 12 = 13910261.$$

Risulta dalla natura di queste operazioni, che quanto più grande è la base del sistema, tanto minore è il numero delle cifre che bisogna impiegare per rappresentare un numero dato.

In tutto ciò che sarà detto in seguito si farà sempre uso de' numeri rapportati alla base 8.

140. Si moltiplica un numero per la base, aggiungendo un zero alla sua destra. Il numero (3754) moltiplicato per otto, cioè per (10) è uguale a (37540). Moltiplicando nuovamente per otto, si ha (375400); e così di seguito. Stando alla convenzione di separar con una virgola le parti minori dell'unità, il numero stesso diviso per la base è uguale a (375,4). E diviso nuovamente per la base, darà (37,54). Segue da ciò, che qualunque sia la base del sistema, un numero si moltiplica o si divide per la base trasportando la virgola o da sinistra verso destra, o da destra verso sinistra.

141. I principii generali su i quali sono fondate le quattro operazioni, essendo indipendenti dalla base del sistema di numerazione, potranno essere applicati ad un sistema che non differisce dal decimale che per la base. Questa applicazione riuscirà ancora più facile, ravvicinando i metodi dati pel sistema decimale e pe' numeri complessi, e osservando come i principii esposti pel sistema decimale si sono estesi a un sistema in cui le suddivisioni dell'unità non seguono una legge costante, e che perciò deve riguardarsi come più difficile di quello in cui i numeri sono scritti in una base diversa da 10.

Ecco alcuni esempi di addizione.

$$\begin{array}{r} 37543 \\ 2650 \\ 31422 \\ 20045 \\ \hline 114102 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 54311 \\ 77700 \\ 273 \\ 36220 \\ \hline 212724 \end{array}$$

Esempi di sottrazione.

$$\begin{array}{r} 27434 \\ 12776 \\ \hline 12436 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 500004 \\ 254777 \\ \hline 233005 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100000 \\ 35426 \\ \hline 42352 \end{array}$$

La moltiplicazione si fa come nel sistema decimale, avvertendo

però ne' prodotti parziali di riportare al prodotto seguente tutte le unità del second'ordine che vi si contengono, le quali nel caso attuale sono composte di otto unità del prim'ordine.

Ecco alcuni esempi.

```
   375426            7 3 4,26
      376              5.3 72
  -------           -----------
  3761204            1 6 7 054
 3356732            64 0 6 32
1370502            262 5 0 2
---------         4515 5 6
176620724         -----------
                  5066,2 3 574
```

Il seguente esempio potrà servir di norma per la divisione.

```
40543'2'0'7'      | 5732
34502             |-------------
-----             | 5410,645 . . . .
 30412'
 27550
 -----
   642 0'
   573 2
   -----
    40 6 7'0'
    43 4 3 4
    ---------
      3 2 3 4 0'
      2 7 5 5 0
      ---------
        2 5 7 00'
        2 1 6 16
        --------
          4 0 62
```

142. La difficoltà che si sperimenta sì nel leggere che nel far le operazioni sopra i numeri scritti con un'altra base dipende da che il linguaggio non si trova in corrispondenza col sistema di numerazione. Imperocchè le operazioni di composizione e scomposizione, che si eseguono su i numeri combinando fra loro le diverse cifre che li rappresentano, alcune possono ridursi a regole pratiche e sono quelle che risultano da principii generali, indipendenti o dalla base del sistema o del sistema stesso; altre le esegue la mente, e sono strettamente dipendenti dal valore che le cifre ricevono dal posto che occupano. Considerando per es. la moltiplicazione, si vedrà, che dipende da un principio generale la regola di ripeter separatamente ciascuna delle parti del moltiplicando tante volte per quante unità contiene il moltiplicatore; che dipende dal sistema di numerazione la regola che quando le unità del moltiplicatore si trovano scritte sotto la prima cifra (a sinistra) del moltiplicando, si debbono scrivere i prodotti parziali in modo che la prima cifra di ciascuno occupi lo stesso posto della corrispondente cifra del moltiplicatore; e dipende dalla base

10 il saper ne' prodotti di una cifra per un'altra ricavar le unità del second'ordine. Allorchè dunque il linguaggio o manca, o non si trova in corrispondenza col sistema di numerazione, le operazioni debbono riuscir grandemente più difficili.

Il pregio dell'attuale sistema non risiede nella scelta della base, ma nel principio che ogni cifra ha due valori, uno assoluto, l'altro di posizione; il che permette di poter con tanta facilità combinar le cifre fra loro (*).

(*) Questo sistema ci è stato tramandato dagli Arabi insiem colle cifre di cui si fa uso, le quali perciò son dette Arabe.

I Romani ed i Greci, quantunque avessero una numerazione parlata uguale alla nostra, avevano un sistema di scrivere i numeri diversissimo ed assai male immaginato; giacchè adoperavan le lettere, e sempre col medesimo valore assoluto.

I Romani facevan uso delle sole lettere C, I, L, V, X, e rappresentavano i numeri così:

Cifre Romane. I, V, X, L, C, IↃ, CIↃ, IↃↃ, CCIↃↃ, IↃↃↃ, CCCIↃↃↃ.

Valori corrisp. 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000, 100000

I medesimi caratteri servivano per rappresentare tutti i numeri intermedi, scrivendoli l'uno dopo l'altro secondo l'ordine di grandezza. Ma pe' numeri fino al C (100) seguivasi il sistema di sommare o sottrarre il valore assoluto di due cifre poste a contatto, secondo chè la cifra di minor valore si trovava a destra o a sinistra di quella di maggior valore. Perciò si scriveva così:

Numeri Rom. IV, VI, IX, XI, XL, LX, XC, CX.

Val. corrisp. 4, 6, 9, 11, 40, 60, 90, 110.

Il sistema di adoperar le cifre per sottrazione non si estendeva che su quelle appartenenti ad un ordine immediatamente inferiore, e non si mettevano in relazione che le cifre appartenenti a due ordini consecutivi, considerando la successione degli ordini secondo il sistema di numerazione parlata. Perciò si scriveva XCIX e non IC per indicar 99, XLV e non VL per indicar 45. Parimente avendosi LIX, l'I si metteva in relazione con X e non con L; per cui quel numero rappresenta 59 e non 61. Il numero 7864 secondo questo sistema si scrive IↃↃ-CIↃ-CIↃ-IↃ-CCCLXIV.

Nel considerar la numerazione parlata de' Latini si è preteso che i Romani contassero fino a 100000. Ma è chiaro che partendo da CIↃ e stabilendo che questo numero divenga decuplo per ogni coppia di C che vi si aggiungono, e che il suo valore si debba prender per metà allorchè si sopprimono le C a sinistra, si vede che è possibile con questo sistema rappresentare qualunque numero. Perciò un milione si scrive CCCCIↃↃↃↃ, e 500000 IↃↃↃↃ, e così di seguito

Ma dopo il C (100) il sistema andò soggetto a qualche variazione, giacchè al IↃ fu sostituito un D e al CIↃ un M. Le lettere V, X, L, C, D, M segnate al di sopra con una linea acquistavano un valore 1000 volte più grande. Perciò si scriveva $\overline{V}$ per 5000, $\overline{X}$ per 5000, ... $\overline{M}$ per rappresentare un milione.

Vi ha pure chi pretende che 5000 si scrivesse VM; 10000, XM, ec., nel qual caso le cifre di valor più piccolo servirebbero di moltiplicatore.

I Greci avevano due sistemi di numerazione scritta. In uno si servivano delle

143. Le condizioni principali alle quali dovrebbe soddisfare la base per presentare il massimo numero di vantaggi sono le seguenti: 1° che non fosse troppo piccola, per evitar l'inconveniente di dover adope-

---

lettere majuscole; e il modo di scrivere non differiva da quello de' Romani se non perchè le cifre erano adoperate sempre per addizione.

Caratteri Greci	Valori corrispondenti
I	1
Π Πέντε (pente)	5
Δ Δέκα (deca)	10
IΔ̄I	50
H Hέκατόν (ecaton)	100
IH̄I	500
X Χίλια (chilia)	1000
IẊI	5000
M Μῦρια (miria)	10000

Pe' numeri intermedi si ripetevano le medesime cifre, finchè col loro valore assoluto formassero il numero dato. Perciò si scriveva:

Numeri Greci	IIII,	ΔΠII,	IH̄IHHΔII,	MIX̄IHHI, ec.
Valori corris.	4,	17,	712,	15201

L'altro sistema di numerazione scritta era fondato sul modo di contare per unità, per diecine, per centinaja, ec.; sicchè si facea uso delle lettere dell'alfabeto per rappresentare prima i primi nove numeri, poi le nove diecine, poi le 9 centinaja. Le medesima lettere con un accento al di sotto acquistavano un valore 1000 volte più grande.

Unità		Diecine		Centinaja		Migliaja	
α	1	ι	10	ρ	100	α,	1000
β	2	κ	20	σ	200	β,	2000
γ	3	λ	30	τ	300	γ,	3000
δ	4	μ	40	υ	400	δ,	4000
ε	5	ν	50	φ	500	ε,	5000
ς	6	ξ	60	χ	600	ς,	6000
ζ	7	ο	70	ψ	700	ζ,	7000
η	8	π	80	ω	800	η,	8000
θ	9	ϟ	90	ϡ	900	θ,	9000

Si scrivevano queste cifre senza alcun ordine, e per leggere un numero conveniva fare un'addizione. Perciò

$$\mu\omega\alpha_{,}\gamma\alpha = 40 + 800 + 1000 + 3 + 1 = 1844.$$

Questi sistemi, oltre la difficoltà che presentano per combinar le cifre fra loro, hanno il difetto di non potersi estendere per rappresentar tutt'i numeri possibili, e di non poter esser adoperati a rappresentare parti minori dell'unità.

rar molti caratteri per rappresentare un numero; 2° che non fosse molto estesa, perchè difficile a concepirsi; 3° che contenesse il maggiore numero di divisori, per poter trasportare il sistema di numerazione alle misure di cui si fa uso ne' bisogni ordinari della società.

Si commenda la base 10 come quella che senza esser molto piccola si trova meglio proporzionata all'intelligenza comune (*). Ma il sistema decimale contenendo nella sua scala i soli divisori 2 e 5 fu trovato poco idoneo per servir di base alle misure, ove la possibilità di poter dividere in molte maniere l'unità in parti eguali è di non poca utilità nel commercio minuto. Da ciò l'origine de' numeri complessi.

144. Il sistema binario, cioè quello che ha per base 2, e che perciò non ha bisogno che delle sole cifre 0 e 1, presenta varie proprietà particolari; delle quali la più importante è che non dovendosi operare che sulle cifre 0, 1, tutte le operazioni rinscirebbero semplicissime, e principalmente la moltiplicazione si ridurrebbe a somma, e la divisione a sottrazione.

Ma questi vantaggi non sembrano abbastanza compensati dall'inconveniente di dover adoperar moltissime cifre per rappresentare i numeri; il che produce che le operazioni, sebbene più facili, riescono tanto più lunghe quanto è maggiore il numero delle cifre adoperate.

(*) Si opina che il sistema decimale si trovi stabilito da che gli uomini nel cominciare a contare si sono serviti delle dita per punti di richiamo. Convalida questa opinione la corrispondenza nel modo di contare fra diverse nazioni, e l'uso che i fanciulli fanno delle dita quando imparano a contare.

CAPO VII.

POTENZE E RADICI.

145. Se un numero si moltiplica per se stesso, e poi il prodotto un'altra volta per lo stesso numero, e così si prosegue, tutti questi prodotti si chiamano le *potenze* successive del numero dato. Quindi la potenza di un numero non è altro che il prodotto di molti fattori tutti eguali a quel numero. Il grado della potenza è uguale al numero de' fattori; perciò quella che contiene due fattori, cioè che si ottiene moltiplicando il numero una volta per se stesso, si chiama seconda potenza; quella che contiene tre fattori, terza potenza; e così di seguito. Per es. $3 \times 3 = 9$ è la seconda potenza di 3; $9 \times 3 = 27$ è la terza potenza di 3; $27 \times 3 = 81$ è la quarta, ec.

La potenza seconda e la terza si chiamano anche *il quadrato* e il *cubo* di un numero, per una ragione che sarà detta più avanti.

Questa moltiplicazione successiva di un numero per se stesso, si chiama *elevazione a potenza*.

146. Il numero 3 rispetto alle sue potenze si chiama *radice*; e siccome la radice è dello stesso grado della potenza da cui deriva, 3 è la radice seconda o quadrata di 9, la radice terza o cubica di 27, la radice quarta di 81, ec. Perciò la radice seconda, terza, quarta ec. di un numero è quel numero che moltiplicato una, due, tre, ec. volte per se stesso riproduce il numero dato.

L'operazione che serve per ritornare dalla potenza alla radice si chiama *estrazione della radice*.

Non si presenta ordinariamente il bisogno di eseguir questa operazione che per la radice quadrata; per le radici cubiche, qualche volta; e per le radici degli altri gradi, assai raramente. Quest'operazione non occorrendo negli ordinari problemi d'Aritmetica, sarà esposta altrove (*).

147. Quando un numero è composto di più fattori primi, la potenza del detto numero conterrà gli stessi fattori primi, e sarà il prodotto delle potenze di ciascun fattore.

Sia per es. $15 = 5 \times 3$. La terza potenza sarà $5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 3$; e siccome si può invertire l'ordine de' fattori, si vede che la terza potenza di 15 è uguale a $5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3$; cioè uguale al prodotto della terza potenza di 5 per la terza potenza di 3. Perciò in una potenza qualunque di 15 non possono trovarsi che i fattori 5 e 3, che sono i fattori di 15.

(*) V. gli Elem. di Alg. n° 103 e seg., 487.

148. Se una frazione si deve moltiplicare per se stessa, non potendosi dividere i suoi termini per quelli della frazione inversa (n° 96, 2°), bisognerà necessariamente moltiplicare numeratore per numeratore e denominatore per denominatore. Perciò $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$. In generale si eleva a potenza una frazione elevando a potenza il numeratore e il denominatore.

Da ciò risulta che il numeratore e il denominatore di una potenza qualunque di un numero frazionario non conterranno altri fattori primi diversi da quelli che contenevano. Quindi se la frazione data è irriducibile, anche la potenza sarà una frazione irriducibile; cioè le *potenze successive di una frazione irriducibile son tutte frazioni irriducibili*. Per es. le potenze di $\frac{2}{5}$, cioè $\frac{4}{25}$, $\frac{8}{125}$, $\frac{16}{625}$, ec. sono tutte frazioni irriducibili.

149. Se si formano le seconde potenze de' numeri interi consecutivi, si trova fra l'una è l'altra un intervallo tanto più grande quanto più grandi sono i numeri, e più alta la potenza. Per es. le seconde potenze de' numeri 15, 16, 17 sono 225, 266, 299-

Ciò posto, se si cercasse la radice di un numero compreso fra questi, per es. di 232, è evidente che questa radice dovrebbe esser compresa tra 15 e 16. Or se si suppone che questa radice possa esser espressa da nn numero frazionario compreso tra 15 e 16, bisogna che questo numero frazionario moltiplicato per se stesso produca 232, il che non può essere. Dunque la radice quadrata di questo numero non può esser espressa nè da un numero intero nè da un numero frazionario.

Lo stesso ha luogo per le radici di tutti i gradi.

Si è detto (n° 57) che i numeri interi e le frazioni hanno una comune misura con l'unità, e perciò si chiamano *ccmmensurabili*. Questi numeri che non possono essere espressi esattamente nè da un intero nè da un numero frazionario, non avranno comune misura con l'unità, e perciò si chiamano numeri *incommensurabili*.

Da tutto ciò si conchiude che le radici di qualunque grado di un numero intero, o sono numeri interi, o numeri incommensurabili.

CAPO VIII.

DELLA RAGIONE E DELLA PROPORZIONE.

150. Si è detto (n° 2) che per aver idea di una grandezza bisogna paragonarla ad un'altra della medesima specie collo scopo di vedere quante volte vi è contenuta. Il risultamento di questo confronto si chiama il *rapporto* o la *ragione* delle due quantità.

Perciò (n° 3) il numero non è che il rapporto che una quantità ha colla sua unità.

Per veder quante volte una quantità contiene un'altra, bisogna eseguire una divisione. Quindi il rapporto di due quantità è precisamente il quoziente della quantità che si paragona divisa per quella cui si è paragonata. Per es. se si ha una quantità rappresentata da 15 e un'altra da 5, $\frac{15}{5}$ ovvero 3 sarà la loro ragione; parimente $\frac{9}{7}$ è il rapporto delle due quantità 9 a 7.

Per indicare il rapporto di 9 a 7 si scrive 9 : 7 ; e così in ogni altro caso. I numeri 9 e 7 si dicono i *termini* del rapporto.

Non si può stabilire rapporto che fra quantità della medesima specie o *omogenee*. Ma il rapporto, essendo indipendente dalla natura di queste quantità, sarà sempre un numero astratto.

151. Se si hanno due rapporti eguali, i quattro termini che li compongono costituiranno una *proporzione*. Il rapporto 3 : 2 essendo uguale a quello di 5 : 20, questi quattro numeri formeranno una proporzione, la quale si scrive

$$3 : 12 :: 5 : 20,$$

e si legge: 3 *sta a* 12 *come* 5 *a* 20.

Dunque *la proporzione è l'eguaglianza di due ragioni.*

I rapporti essendo numeri astratti, i termini che in una proporzione compongono il primo rapporto possono essere di specie diversa o *eterogenei* con quelli del secondo.

I primi termini di ogni rapporto si chiamano *antecedenti*, e i secondi *conseguenti*.

Se il conseguente del primo rapporto è ugnale all'antecedente del secondo, la proporzione si dice *continua*, Una proporzione continua si può scriver più brevemente $\div$ 3 : 6 : 12, in vece di 3 : 6 :: 6 : 12.

Il termine che sta in mezzo si chiama il *medio proporzionale* fra i due estremi.

152. Il rapporto di due quantità esprime in che modo una

quantità può formarsi per mezzo di un'altra. Per es. il rapporto di 15 a 5 è $\frac{15}{5}$ ossia 3. Questo 3 fa conoscere in che modo il 15 si forma prendendo per elemento 5, ed esprime che per formar 15 ci vogliono tre quantità rappresentate da 5. Parimente il rapporto di 6 a 9 è $\frac{6}{9}$ ovvero $\frac{2}{3}$, la quale frazione indica che per formare la quantità 6 per mezzo del 9 bisogna prima raddoppiare il 9 e poi prenderne la terza parte

È da osservarsi che siccome $\frac{5}{8}$ è la frazione inversa di $\frac{8}{5}$ (n° 91), anche il rapporto di 5 : 8 si dice l'*inverso* del rapporto di 8 : 5.

133. Il quoziente, o la frazione che rappresenta il rapporto di due quantità, essendo anch'esso un rapporto quando si riferisce all'unità, ne segue che il dividendo, il divisore, il quoziente e l'unità formano una proporzione. Per la ragione medesima il prodotto, il moltiplicando, il moltiplicatore e l'unità sono in proporzione. Perciò nella divisione si tratta di esprimere il rapporto di due quantità per mezzo di un altro rapporto che ha per uno de' termini l'unità; e nella moltiplicazione, conoscendo in che modo una quantità è composta per mezzo dell'unità, si tratta di comporre similmente un'altra quantità per mezzo del moltiplicando.

L'idea della proporzione fa meglio comprender l'oggetto di queste due operazioni, le quali, quantunque si possano eseguire, l'una per mezzo dell'addizione, l'altra per la sottrazione, offrono un carattere che permette di riguardarle sotto un altro punto di vista; ed è, che i due numeri dati, quello che si cerca, e l'unità, presi secondo l'ordine conveniente, debbono formare una proporzione.

134. Si possono paragonar due quantità della medesima specie per conoscer la loro ineguaglianza, e il risultamento di questo confronto si dice *differenza* (n° 13). Quattro numeri ne' quali la differenza tra il primo e il secondo è uguale alla differenza fra il terzo e il quarto costituiscono un'*equidifferenza*, la quale si scrive 7 . 5 : 13 . 11 (*).

Le parole *termini*, *antecedente*, *conseguente*, *equidifferenza continua* hanno lo stesso significato che nella proporzione.

La teorica dell'equidifferenza essendo facilissima, e d'altronde non avendo bisogno di trattarne per le cose che seguono, si passerà immediatamente a parlare delle proporzioni.

(*) Ordinariamente il risultamento del confronto fatto fra due quantità o nel primo o nel secondo modo dicesi in generale rapporto; ma si dice *rapporto geometrico* quello in cui si cerca il quoziente, e *rapporto aritmetico* quello in cui si domanda la differenza. Così pure la proporzione si chiama geometrica o aritmetica secondo che i rapporti di cui si compone sono dell'una o dell'altra specie.

ART. I.

Proprietà delle proporzioni.

155. *Due rapporti eguali ad un terzo sono eguali fra loro.*

Da questa proposizione evidente, si deduce che se due proporzioni hanno un rapporto comune, gli altri due rapporti formeranno una proporzione. Per es. le due proporzioni

$$3 : 9 :: 5 : 15, \quad 3 : 9 :: 4 : 12$$

danno la proporzione

$$5 : 15 :: 4 : 12.$$

156. Un rapporto, essendo il quoziente di un numero diviso per un altro, non si altera moltiplicando o dividendo i suoi termini per un medesimo numero (n° 46, V.). Perciò il rapporto di $3 : 5$ è lo stesso che quello di $6 : 10$.

157. Da ciò segue:

1° Un rapporto che ha i termini frazionarî, si può sempre esprimere per mezzo di due numeri interi, moltiplicando i termini del rapporto pe' denominatori delle frazioni. Perciò il rapporto di $3 : \frac{5}{7}$, moltiplicando i termini per 7, risulta uguale a quello di $21 : 5$; il rapporto di $\frac{3}{8} : \frac{7}{5}$, col moltiplicare i suoi termini per 40, diviene quello di $15 : 56$.

2° Ogni rapporto si può cambiare in un altro che abbia per uno de' termini l'unità. Per es. il rapporto di $3 : 5$ si può cambiare in quello di $1 : \frac{5}{3}$.

3° Due frazioni che hanno lo stesso denominatore, stanno fra loro come i numeratori. Per es. il rapporto di $\frac{3}{5} : \frac{2}{5}$ è uguale al rapporto di $3 : 2$.

4° Due frazioni che hanno eguali i denominatori, stanno in ragione inversa de' numeratori. Per es. la ragione di $\frac{3}{7} : \frac{3}{5}$ è uguale a quella di $\frac{1}{7} : \frac{1}{5}$, eguale a quella di $5 : 7$.

158. I numeri interi e frazionari, chiamati quantità commensurabili perchè hanno coll'unità una misura comune (n° 57), si dicono anche quantità *razionali*, perchè il loro rapporto o la ragione può esser espressa da due numeri interi. Il rapporto di $\frac{8}{5}$ a 1 è quello di $8 : 5$.

159. Dalla proporzione 3 : 12 : : 5 : 20 si ha $\frac{3}{12} = \frac{5}{20}$; le quali frazioni ridotte allo stesso denominatore danno $\frac{3 \times 20}{12 \times 20} = \frac{5 \times 12}{20 \times 12}$. Ma due frazioni eguali, dello stesso denominatore, hanno i numeratori eguali, perciò sarà $12 \times 5 = 20 \times 3$; dunque *in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale al prodotto de' medi.*

Per assicurarsi se fra quattro termini vi è proporzione, bisogna verificare se il prodotto de' termini estremi è uguale a quello dei medi.

È da osservarsi, che in una proporzione, secondo che l'antecedente del primo rapporto è maggiore o minore del suo conseguente, anche l'antecedente del secondo rapporto dev'esser maggiore o minore del suo conseguente. Per cui se si hanno quattro numeri, ne' quali a colpo d'occhio si scopre che manca questa condizione, si conchiuderà subito che dessi non sono in proporzione.

160. Dall'esposta proprietà risulta che i termini di una proporzione si possono cambiar di sito, purchè gli stessi termini si trovino sempre o ne' posti estremi o ne' medi. Riprendendo la proporzione di sopra, i cambiamenti che si possono fare sono i seguenti :

1ª	3 : 12 : : 5 : 20,	12 : 3 : : 20 : 5,	5ª
2ª	3 : 5 : : 12 : 20,	12 : 20 : : 3 : 5,	6ª
3ª	20 : 12 : : 5 : 3,	5 : 3 : : 20 : 12,	7ª
4ª	20 : 5 : : 12 : 3;	5 : 20 : : 3 : 12.	8ª

Il mutar di luogo de' termini medi senza toccare gli estremi, come si è fatto passando dalla prima alla seconda proporzione, s'indica colla parola *permutando*; e l'invertir ciascuna ragione, cioè mettere il conseguente per antecedente e l'antecedente per conseguente, siccome si farebbe passando dalla 1ª alla 5ª, s'indica col vocabolo *invertendo.*

È da osservarsi ancora che quando i rapporti che costituiscono una proporzione si scrivono sotto forma di frazioni, è indifferente prender per numeratori delle frazioni o gli antecedenti o i conseguenti, purchè in ciascuno si segua lo stesso ordine.

161. *In una proporzione moltiplicando o dividendo per un medesimo numero i due antecedenti o i due conseguenti, i numeri che ne risultano saranno proporzionali.* Nella proporzione 3 : 12 : : 5 : 20, moltiplicando i due antecedenti per 2 e i conseguenti per 3, si ha un'altra proporzione che è 6 : 36 : : 10 : 60.

Infatti la prima proporzione permutando diviene 3 : 5 : : 12 : 20 ; in questa si possono moltiplicare i termini del primo rapporto per 2, e quelli del secondo per 3, e si ha 6 : 10 : : 36 : 60, e permutando di nuovo si ha 6 : 36 : : 10 : 60.

152. Sieno

3 : 12 : : 5 : 20,   3 : 9 : : 5 : 15

due proporzioni che hanno comuni gli antecedenti; permutando si avrà

$$3 : 5 :: 12 : 20, \qquad 3 : 5 :: 9 : 15.$$

Ora i secondi rapporti di queste ultime proporzioni, essendo eguali al rapporto 3 : 5, saranno eguali fra loro; e perciò si avrà

$$12 : 20 :: 9 : 15, \text{ e anche } 12 : 9 :: 20 : 15.$$

Perciò *se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti formeranno una proporzione.*

Si dimostra similmente che *se due proporzioni hanno comuni i conseguenti, gli antecedenti saranno in proporzione.*

163. Sieno ancora le proporzioni

$$3 : 12 :: 5 : 20, \qquad 3 : 15 :: 4 : 20.$$

le quali hanno comuni i termini estremi. Sarà (n° 159)

$$3\times20=12\times5, \qquad 3\times20=15\times4;$$

e quindi $12\times5=15\times4$; e da questi prodotti ripassando alla proporzione si ha

$$12 : 15 :: 4 : 5.$$

Quindi *se due proporzioni hanno comuni i termini estremi, il rapporto de' due primi medi è uguale al rapporto inverso degli altri due.* Lo stesso avrebbe luogo se fossero comuni i termini medi.

164. Dalla proporzione 3 : 12 :: 5 : 20 si ricavano le eguaglianze

$$\frac{12}{3}=\frac{20}{5}, \qquad \frac{3}{12}=\frac{5}{30}.$$

Le quali non si alterano, se a ciascuna quantità si aggiunge l'unità; si avrà allora

$$1+\frac{12}{3}=1+\frac{20}{5}, \qquad 1+\frac{3}{12}=1+\frac{5}{20};$$

ovvero

$$\frac{3+12}{3}=\frac{5+20}{5}, \qquad \frac{3+12}{12}=\frac{5+20}{20}.$$

Da queste eguaglianze ripassando alle proporzioni, si ha

$$3+12 : 3 :: 5+20 : 5, \qquad 3+12 : 12 :: 5+20 : 20;$$

Queste due operazioni s'indicano colla parola *componendo.*
Permutando, si ha

$$3+12:5+20::3:5 \text{ o pure } ::12:20;$$

cioè *in una proporzione qualunque la somma de' suoi primi termini sta alla somma de' due ultimi, come il primo al terzo, o come il secondo al quarto.*
Riferendo quest'ultima proposizione alla poporzione 3 : 5 : : 12 : 20, si ricava che *in una proporzione la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.*

165. Dalle eguaglianze

$$\frac{12}{3}=\frac{20}{5}, \qquad \frac{3}{12}=\frac{5}{20},$$

si ricava pure

$$\frac{12}{3}-1=\frac{20}{5}-1, \qquad 1-\frac{3}{12}=1-\frac{5}{20},$$

e quindi

$$\frac{12-3}{3}=\frac{20-5}{5}, \qquad \frac{12-3}{12}=\frac{20-5}{20};$$

dalle quali si passa alle proporzioni

$$12-3:20-5::3.5, \text{ o pure } ::12:20,$$

cioè *in una proporzione, la differenza de' due primi termini sta alla differenza de' due ultimi, come il primo al terzo, o come il secondo al quarto.* Questa operazione viene indicata colla parola *dividendo.*

166. Dalle due proporzioni

$$12+3:20+5::3:5,$$
$$12-3:20-5::3:5;$$

risulta

$$12+3:12-3::20+5:20-5;$$

cioè *la somma de' due primi termini sta alla loro differenza, come la somma degli altri due termini sta alla loro differenza;* ovvero: *la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma de' conseguenti sta alla loro differenza.*

167. Si abbiano diversi rapporti eguali, cioè

$$3:9::5:15::2:6::4:12.$$

Co' medesimi si possono formare tre proporzioni, che sono:

$$3 : 9 :: 5 : 15,$$
$$5 : 15 :: 2 : 6,$$
$$2 : 6 :: 4 : 12.$$

Dalla prima si ha

$$3+5 : 9+15 :: 5 : 15.$$

La quale proporzione ha un rapporto comune colla seconda, per cui si ha

$$3+5 : 9+15 :: 2 : 6.$$

Questa dà parimente

$$3+5+2 : 9+15+6 :: 2 : 6,$$

e per la terza proporzione si ha

$$3+5+2 : 9+15+6 :: 4 : 12.$$

Componendo nuovamente si ha

$$3+5+2+4 : 9+15+6+12 :: 4 : 12.$$

Si vede da ciò, che *in una serie de' rapporti eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente,*

168. Sieno più proporzioni

$$3 : 6 :: 12 : 24,$$
$$5 : 8 :: 10 : 16,$$
$$6 : 7 :: 18 : 21.$$

Da queste si hanno le eguaglianze

$$\frac{6}{3}=\frac{24}{12}, \quad \frac{8}{5}=\frac{16}{10}, \quad \frac{7}{6}=\frac{21}{18}.$$

É evidente che il prodotto delle prime frazioni dev'esser uguale al prodotto delle seconde, cioè

$$\frac{6}{3}\times\frac{8}{5}\times\frac{7}{6}=\frac{24}{12}\times\frac{16}{10}\times\frac{21}{18},$$

ovvero

$$\frac{6\times8\times7}{3\times5\times6}=\frac{24\times16\times21}{24\times10\times18}.$$

Da questa eguaglianza si passa nuovamente alla proporzione

$$3 \times 5 \times 6 : 6 \times 8 \times 7 :: 12 \times 10 \times 18 : 24 \times 16 \times 21.$$

Ma questa proporzione risulta moltiplicando i termini corrispondenti delle tre proporzioni date; dunque *se si moltiplicano*, *termine per termine*, *diverse proporzioni*, *i prodotti saranno in proporzione.*

169. Se le proporzioni son sempre le stesse, i prodotti si cambiano in potenze. Perciò se si ha la proporzione

$$3 : 5 :: 9 : 15,$$

sarà anche

$$3 \times 3 : 5 \times 5 :: 9 \times 9 : 15 \times 15,$$

$$3 \times 3 \times 3 : 5 \times 5 \times 5 :: 9 \times 9 \times 9 : 15 \times 15 \times 15,$$

ec.

E siccome la prima porporzione ha per termini le radici delle altre, si può conchiudere che *se si ha una proporzione*, *le potenze o le radici dello stesso grado de' termini medesimi sono sempre in proporzione.*

170. Dall'essere in una proporzione il prodotto de' termini estremi eguale al prodotto de' medi, conoscendo tre termini si può trovare il quarto. Suppongasi che il termine incognito sia precisamente il quarto. Siccome il prodotto del primo e del quarto dev'esser eguale al prodotto de' due medi, sarà dato il prodotto e uno de' fattori; per cui dividendo il prodotto de' termini medi pel primo termine, si avrà il quarto termine. Per es. indicando con x il termine incognito, dalla proporzione $3 : 7 :: 12 ; x$, si ricava $x = \frac{7 \times 12}{3} = 28$.

Questa operazione è quella che dee farsi per trovare il *quarto proporzionale.*

171. Allorchè son dati i termini estremi e si cerca il medio proporzionale (n° 151), l'operazione riducesi ad estrarre la radice quadrata (n° 146) dal prodotto de' termini dati. In effetti sieno 3 e 12 i termini dati e x il medio che si domanda; dovrà esser $3 : x :: x : 12$, e $x \times x = 36$; e siccome $36 = 6 \times 6$, sarà $x = 6$. Quando il prodotto non è quadrato perfetto, il medio proporzionale sarà un numero irrazionale (n° 149).

172: Se si ha una serie di termini continui ed emogenei, la ragione del primo termine all'ultimo si dice *composta* dalle ragioni del primo al secondo, del secondo al terzo, del terzo al quarto, ec. Per es. sieno i termini 3, 5, 8, 13; la ragione di 3 : 13 si dice composta dalle ragioni di 3 : 5, di 5 : 8, di 8 : 13.

Sieno ora diverse ragioni, per es. di 3 : 5, di 7 : 11, di 9 : 13.

Si faccia (n° 170) $7 : 11 :: 5 : \frac{5\times11}{7}$, $9 : 13 :: \frac{5\times11}{7} : \frac{5\times11\times13}{7\times9}$

Alle ragioni date si potranno sostituire le altre di $3 : 5$, di $5 : \frac{5\times11}{7}$, di $\frac{5\times11}{7} : \frac{5\times11\times13}{7\times9}$ che sono date per mezzo di una serie di termini continui. Quindi la ragion composta dalle ragioni date sarà espressa da $3 : \frac{5\times11\times13}{7\times9}$, ovvero $3\times7\times9 : 5\times11\times13$. Ma questa è la ragione del prodotto di tutti gli antecedenti al prodotto di tutti i conseguenti; perciò la *ragione composta* di più ragioni è uguale a quella del prodotto di tutti gli antecedenti al prodotto di tutti i conseguenti.

La ragion composta si suole indicare scrivendo le ragioni componenti tra parentesi. Per es. la ragione composta di $3 : 5$ e di $7 : 11$ s'indica scrivendo $(3 : 5)(7 : 11)$.

173. Se le ragioni componenti sono eguali, la ragione composta si dice tanto *moltiplice* di una quante sono le ragioni componenti; e particolarmente si dice duplicata, se le ragioni son due, triplicata se son tre. Per es. se si hanno i termini $2 : 4 : 8 : 16$, sarà $2 : 16$ in ragion triplicata di $2 : 4$.

Or siccome la ragion composta equivale a quella del prodotto di tutti gli antecedenti al prodotto di tutti i conseguenti, quando le ragioni sono eguali questi prodotti si cambiano in potenze; quindi la ragion duplicata è quella stessa delle seconde potenze, la ragion triplicata è quella delle terze potenze, ec.

D'onde si conchiude che *in una serie di termini continuamente proporzionali sta il primo al terzo come la seconda potenza del primo alla seconda potenza del secondo, il primo al quarto come la terza potenza del primo alla terza potenza del secondo*, *ec.*

174. Dalle cose già dette si ricavano molte conseguenze.

1° Siccome un prodotto non cambia valore comunque si permuti l'ordine de' fattori, la ragion composta sarà sempre la stessa con qualunque ordine si prendano le ragioni componenti.

2° La ragion composta di due ragioni inverse è di uguaglianza, cioè ha i termini eguali.

3° Due frazioni stanno fra loro in ragion composta dalla diretta de' numeratori e dalla inversa de' denominatori. Per es. il rapporto $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ è uguale a quello di $2\times7 : 5\times3$; e perciò sarà

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} :: (2 : 5)(7 : 3)$$

4° Due ragioni composte sono eguali, se le ragioni componenti sono eguali.

5° Perciò se si hanno diverse proporzioni, la ragion composta dalle prime ragioni è uguale alla composta delle seconde*, e queste formeranno una proporzione, secondo si era già detto (n° 168).

6° Se una ragione è la composta di due altre, una di queste

sarà eguale alla composta dalla diretta della prima e dall'inversa della seconda. Per es. si abbia

$$14 : 15 :: (2 : 3)(7 : 5);$$

componendo queste ragioni con la ragione 3 : 2 che è l'inversa di 2 : 3, sarà

$$(14 : 15)(3 : 2) :: 7 : 5,$$

perchè le due ragioni 2 : 3 e 3 : 2 danno 1.

ART. II.

Problemi dipendenti dalle proporzioni.

175. Le quistioni che si presentano in Aritmetica, quando non si possono risolvere direttamente con una delle quattro operazioni, dipendono ordinariamente dalle proporzioni. Il sistema di operazioni da farsi vien conosciuto sotto il nome di *Regola.*

§ I. *Della Regola del Tre.*

176. Tutti i problemi che conducono ad una proporzione di cui son dati tre termini e l'altro è la quantità che si cerca, si risolvono con una proporzione, seguendo la regola del n° 170, che dagli Aritmetici è chiamata *del tre.* A rischiarar questa teorica presenteremo la soluzione di diverse quistioni.

I. *Con* 16 *ducati si sono comprate* 3 *canne di stoffa*; *per comprare* 13 *canne della stessa stoffa quanto ci vorrà?*

È da osservarsi che se il numero delle canne fosse doppio del primo, anche la somma necessaria dovrebbe esser doppia; se triplo il numero delle canne, anche tripla la somma; e così di seguito. Dunque il prezzo aumenta nello stesso rapporto della stoffa; perciò le due quantità di stoffa, e i due prezzi corrispondenti formeranno una proporzione; e si avrà $5 : 13 :: 15 : x$. E quindi sarà $x = \frac{13 \times 15}{3} = 65$ ducati.

II. *Un corriere in* 7 *ore ha percorso* 30 *miglia*; *quante miglia percorrerà in* 9 *ore camminando colla medesima velocità?*

È chiaro che in un tempo doppio percorrerebbe il doppio delle miglia, nella metà del tempo la metà delle miglia, ec. Dunque la distanza cresce o diminuisce nello stesso rapporto del tempo. Si stabilirà perciò la proporzione $7 : 9 :: 30 : x$; da cui $x = \frac{9 \times 30}{7}$.

III. *Con* 30 *operaj si sono fatte* 75 *canne di un dato lavoro; con* 40 *operaj quante canne di lavoro si faranno?*

Siccome con un doppio o triplo numero di operaj, si farebbe il doppio o il triplo del lavoro, si avrà la proporzione

$30 : 40 \; : 75 : x = \frac{40 \times 75}{30} = 100.$

177. Dall'esame di queste quistioni si rileva che la regola del tre può applicarsi solo quando una quantità cresce o diminuisce nello stesso rapporto di un'altra ; ed è necessario assicurarsi bene se questa condizione si verifica, altrimenti si perverrebbe ad un risultamento falso. Se per es. si dicesse: un vaso di un dato diametro e di un metro di altezza pieno di acqua si è vuotato in 3 minuti , in quanto tempo si vuoterà un altro vaso dello stesso diametro e di metri 47 di altezza ? A questo problema non si potrebbe applicare la regola del tre , giacchè quando l'altezza è doppia non si richiede un tempo doppio per vuotare il vaso , ma un tempo minore. Così conoscendo che un corpo cadendo mette un minuto secondo a percorrere metri 4,9044, non si potrebbe conchiudere che in due minuti secondi percorre uno spazio doppio.

Vi è qualche caso in cui la proporzionalità non si verifica esattamente , ma si ammette per render più semplice il calcolo. Per es. se si dicesse : con 13 cavalli si è tirato un peso di 8 cantaja , 22 cavalli qual peso potranno tirare ? Per poter con questi dati stabilire una proporzione bisogna supporre che il prodotto del lavoro cresca nel medesimo rapporto che cresce il numero dei cavalli. Or questo non è rigorosamente vero , giacchè lo sforzo che fa il cavallo dipende da molti elementi , e particolarmente dal sito in cui si trova ; quindi bisognerebbe che nel secondo caso i 22 cavalli si trovassero tutti nella medesima attitudine de' primi ; il che è difficile a combinarsi. Quando si fa uso della forza degli uomini o delle bestie , il prodotto del lavoro cresce come il loro numero, solamente quando essi possono agire separatamente sopra diversi puntii. Ma quando debbono essere applicati allo stesso punto , il prodotto del lavoro non cresce come il nmero degli agenti, ma in una ragione minore. Solamente per un calcolo approssimato si potrebbe stabilire una proporzione fra i dati del problema precedente , e fare $13 : 22 :: 8 : x = \frac{22 \times 8}{23}$.

178. Assicuratosi che la soluzione di una quistione può dipendere da una proporzione , non si ha altra difficoltà che quella di stabilire il posto che ciascun termine deve occupare. Or nelle quistioni di questo genere cercandosi il valore di una quantità che deve crescere o diminuire nello stesso rapporto di un'altra , fra i dati del problema vi saranno due termini *omogenei* , e uno che deve esser della medesima specie della cosa che si cerca. I due termini omogenei formano il primo rapporto , l'altro rapporto sarà formato dal termine isolato o *solitario* e dall'ignoto.

Nelle quistioni proposte i termini nella proporzione sono situati secondo l'ordine con cui si presentano nell'enunciato. Infatti riprendendo la prima quistione si vede , che siccome crescendo la quantità della stoffa cresce il suo prezzo , stabilendo il primo rapporto secondo l'ordine dell'enunciato cioè 3 : 13 , il secondo rapporto deve seguir pure l'ordine medesimo , perchè il prezzo che si cerca dovendo esser maggiore del prezzo dato , il termine ignoto dev' esser

il conseguente del secondo rapporto (n° 159). Lo stesso si verifica negli altri due problemi.

Vi sono però delle quistioni, nelle quali la quantità che si cerca cresce a misura che un'altra diminuisce, e viceversa; siccome mostrerà il seguente problema.

IV. *Un dato lavoro si è fatto da 15 uomini in 7 giorni; quanto tempo metteranno 24 uomini per fare lo stesso lavoro?*

Qui si vede che quanto maggiore è il numero degli uomini, tanto minor tempo si metterà; sicchè se il numero degli uomini fosse doppio, il tempo necessario sarebbe la metà; se triplo il numero degli uomini, vi bisognerebbe la terza parte del tempo; e così discorrendo. Se dunque si stabilisce il primo rapporto secondo l'ordine dell'enunciato, cioè $15 : 24$, siccome il tempo che si cerca deve esser minore del tempo dato, il secondo rapporto sarà $x : 7$; e si avrà la proporzione $15 : 24 :: x : 7$, da cui si ricava $x = \frac{7 \times 15}{24}$.

Si costuma ordinariamente di mettere il termine incognito nel quarto posto della proporzione. In tal caso per *intavolare* la proporzione si terrà la seguente regola. Col termine solitario e coll'incognito si stabilirà il secondo rapporto mettendo l'incognito per conseguente; siccome i dati del problema fanno conoscere se la quantità che si cerca dev'esser maggiore o minore del termine solitario, fra i due termini omogenei si stabilirà il rapporto secondo l'ordine di grandezza che serban gli altri due termini. A questo modo nel problema precedente avendo stabilito il secondo rapporto $7 : x$, il primo dovrà esser $24 : 15$.

179. Quando una quantità cresce nello stesso rapporto di un'altra, in guisa che se la prima diviene doppia o tripla, ec., anche la seconda diviene doppia o tripla, ec., si dice che queste quantità sono fra loro in *ragion diretta*, *o direttamente proporzionali*. Se una quantità cresce nello stesso rapporto che un'altra diminuisce, in modo cioè che se la prima diviene doppia o tripla, ec., la seconda diviene la metà o la terza parte, ec., queste quantità sono in *ragione inversa o inversamente proporzionali*. Si dice quindi che il prezzo di una cosa è in ragion diretta della sua quantità, che il tempo per eseguire un dato lavoro è in ragion inversa del numero degli uomini che vi s'impiegano.

L'enunciato de' problemi di questo genere si compone sempre di due parti; la prima contiene due quantità eterogenee e note, la seconda contiene due altre quantità rispettivamente omogenee alle prime, delle quali una è incognita. Or quando queste quantità eterogenee sono in ragion diretta, i termini contenuti nella prima parte dell'enunciato formano i due antecedenti; nell'altro caso, cioè quando sono in ragion inversa, bisogna invertir l'ordine de' termini di uno de' rapporti.

180. Ecco ancora altri problemi per esercizio.

V. *Con ducati 137,40 si sono avute libbre 10 e once 7 di argento, quanto se ne potrà avere con ducati 621,32?*

La proporzione è diretta, perché l'argento cresce al crescer del danaro. Si ha dunque la proporzione

Ducati	
137,40	$10^{\text{lib.}}\ 7^{\text{on.}}$
661,32	x

$$137,40 : 661,32 :: 10^{\text{lib.}}\ 7^{\text{on.}} : x.$$

I due primi termini si possono ridurre a numeri astratti moltiplicandoli per 100; poi si può render più semplice il primo rapporto dividendone i termini per 12. E la proporzione diverrà

$$1145 : 5511 :: 10^{\text{lib.}}\ 7^{\text{on.}} : x.$$

Fatto il calcolo, si trova $x = 50^{\text{lib.}}\ 11^{\text{on.}}\ 2^{\text{dr.}}\ 4^{\text{tr.}}\ 13^{\text{gr.}}\frac{123}{229}$.

VI. *Un corriere ha fatto un dato viaggio in 8 giorni camminando 9 ore al giorno; si vuol sapere quante ore al giorno dovrà camminare per fare lo stesso viaggio in 5 giorni?*

Qui le ore sono in ragione inversa de' giorni; giacchè quanto minore è il numero de' giorni che si vogliono spendere, tanto maggiore dev'esser il numero delle ore di viaggio di ogni giorno. Si avrà dunque la proporzione

giorni	ore
8	9
5	x

$$5 : 8 :: 9 : x;$$

d'onde $x = \frac{72}{5} = 14^{\text{or.}}\ 24'$

VII. *Una certa quantità di orzo è stata consumata da 300 cavalli in 15 giorni: per quanto tempo la stessa quantità di orzo potrà alimentare 440 cavalli?*

In questo problema il rapporto è pure inverso, giacchè più grande è il numero de' cavalli, più presto si consumerà l'orzo. Si ha dunque la proporzione

cav.	gior.
300	15
540	x

$$540 : 300 :: 15 : x.$$

Nel primo rapporto si può sopprimere un zero, e poi dividere i termini per 6, e si avrà $9 : 5 :: 15 : x$; da cui $x = \frac{25}{3} =$ giorni $8\frac{1}{3}$

VIII. *In una piazza assediata si hanno i viveri per 4 giorni; volendo resistere per altri 10 giorni a quanto dovranno ridursi le razioni?*

La razione che basta per quattro giorni si può rappresentare per un numero qualunque, ma sarà più semplice di rappresentarla per 1. Si dirà allora: se dando la razione 1 si hanno i viveri per 4 giorni, affinchè i viveri bastino 10 giorni quale razione bisogna dare?

gior.	razione
4	1
10	x

Il rapporto è inverso. La proporzione sarà $10 : 4 :: 1 : x$, da cui $x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, cioè la razione dev'esser ridotta a due quinti dell'ordinaria.

§. II. *Regola del tre composta.*

181. Vi sono de' problemi ne' quali la quantità che si cerca dipende da più cose, alle quali è direttamente o inversamente proporzionale. Ecco uno di questi problemi.

IX. *Un operajo ha fatto* 6 *canne di muro lavorando per* 12 *giorni* 7 *ore al giorno; in* 15 *giorni lavorando* 10 *ore al giorno quante canne di muro farà ?*

Si faccia prima astrazione del numero delle ore, e si dica: se un operajo in 12 giorni fa canne 6 di muro, in 15 giorni quante canne di muro farà? Si avrà quindi la proporzione

$$12 : 15 :: 6 : x ,$$

da cui si ricava $x = \frac{15 \times 6}{12}$; e questa sarà la quantità di muro che farebbe se in entrambi i casi lavorasse per un egual numero di ore Poi si dirà: se lavorando 7 ore al giorno fa canne $\frac{15 \times 6}{12}$ di muro, quanto ne farà lavorando 10 ore al giorno? e si avrà l'altra proporzione

$$7 : 10 :: \frac{15 \times 6}{12} : x ;$$

quindi $x = \frac{10 \times 15 \times 6}{7 \times 12}$.

Si poteva anche risolvere questo problema, scrivendo contemporaneamente le due proporzioni, e chiamando x' (*) il termine ignoto della prima proporzione; si avrà allora

$$12 : 15 :: 6 : x' ,$$
$$7 : 10 :: x' : x .$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine risulta

$$12 \times 7 : 15 \times 10 :: 6 \times x' : x' \times x ;$$

dividendo il secondo rapporto per x', si ha finalmente $x = \frac{10 \times 15 \times 6}{7 \times 12}$.

Questo valore di x si può scrivere ancora sotto la forma $\frac{10}{7} \times \frac{15}{12} \times 6$, dalla quale si rileva che esso è eguale al termine

---

(*) x' si pronunzia *x primo*; ed x'', x''', si pronunziano *x secondo*, *x terzo* ec.

solitario moltiplicato pel prodotto de' rapporti de' giorni e delle ore.

Non sarà inutile avvertire che questo problema si poteva ridurre alla regola del tre semplice, osservando che un lavoro di 12 giorni per 7 ore al giorno equivale ad 84 ore di lavoro, e 10 ore per 15 giorni equivalgono a 150 ore di lavoro. Ridotto così il problema, si ha subito la proporzione

$$84 : 150 :: 6 : x,$$

che è identica a quella trovata per altra via.

182. Ecco un altro problema più complicato.

X. *Si è scavato un canale di pal. 1200 di lunghezza, di larghezza pal. 10 e di profondità palmi 4, e vi si sono adoperati 17 operaj per 8 giorni, lavorando ciascuno per 9 ore al giorno: dovendosi scavare un altro canale di larghezza palmi 8, di profondità pal. 5 si vuol sapere quale lunghezza se ne caverà in 13 giorni con 24 operaj che lavorano 12 ore al giorno?*

Si disporranno l'uno sotto l'altro i dati compresi nelle due parti dell'enunciato, come si vede qui sotto.

Uom.	gior.	or.	lungh.	largh.	prof.
17	8	9	1200	10	4
24	13	12	x	8	5

Poi si stabiliranno le seguenti proporzioni

$$\begin{aligned} 17 : 24 &:: 1200 : x^{I}, \\ 8 : 13 &:: x^{I} : x^{II}, \\ 9 : 12 &:: x^{II} : x^{III}, \\ 8 : 10 &:: x^{III} : x^{IV}, \\ 5 : 4 &:: x^{IV} : x, \end{aligned}$$

le quali derivano dal seguente ragionamento. Si supponga in primo luogo che tutte le altre cose sieno eguali all'infuori del numero degli uomini, e si dirà: se 17 uomini hanno scavato 1200 palmi di canale, quanto ne scaveranno 24 uomini? E poi: se lavorando per 8 giorni si cava una lunghezza x', quanto se ne caverà lavorando per 13 giorni? In seguito: se lavorando 9 ore al giorno si cava una quantità di canale rappresentata da x'', quanta se ne caverà lavorando 12 ore al giorno? Fin qui le ragioni son tutte dirette, perchè crescendo il tempo e gli uomini si ottiene più lavoro. Si dirà in seguito: se facendo il canale di 10 palmi se ne scava una lunghezza x''', volendolo di largh. 8 palmi quale lunghezza si potrà scavare? Qui la ragione è inversa, giacchè quanto più grande è la larghezza tanto più piccola sarà la lunghezza. Finalmente: se si ha la lunghezza x^{IV} quando la profondità è 4 palmi, volendolo fare di profondità pal. 5 quale lunghezza si potrà scavare? In

questo caso anche la ragione è inversa, perchè crescendo la profondità deve diminuir la lunghezza. Questo ragionamento dimostra la giustezza delle stabilite proporzioni. Moltiplicandole per ordine e omettendo nel secondo rapporto tutti i fattori comuni x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, si avrà

$$17\times8\times9\times8\times5 : 24\times13\times12\times10\times4 :: 1200 : x,$$

e quindi

$$x=\frac{24\times13\times12\times10\times4\times1200}{17\times8\times9\times3\times5};$$

la quale espressione si può metter sotto quest'altra forma

$$x=\frac{24}{17}\times\frac{13}{8}\times\frac{12}{9}\times\frac{10}{8}\times\frac{4}{5}\times1200.$$

Osservando questo valore si trova, che $\frac{24}{17}$ è il rapporto diretto del numero degli uomini, $\frac{13}{8}$ è il rapporto diretto de' giorni, $\frac{12}{9}$ quello delle ore di lavoro, $\frac{10}{8}$ è l'inverso del rapporto delle larghezze de' canali che secondo l'enunciato avrebbe dovuto essere $\frac{8}{10}$, e che $\frac{4}{5}$ è parimente il rapporto inverso pelle profondità de' canali. Si può dunque, nel risolver siffatti problemi, osservar la seguente regola. *Si dispongono i dati del problema in due linee siccome è stato fatto più sopra, e si formano tutti i rapporti o diretti o inversi che risultano da' termini relativi alle condizioni del problema; l'incognita sarà eguale al prodotto di tutti questi rapporti e del termine solitario.*

Il valore di x del problema precedente si rende più semplice soprimendo i fattori comuni prima di effettuare le moltiplicazioni. In fatti si ottiene da prima

$$x=\frac{3}{17}\times\frac{13}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\times1200,$$

che riducesi finalmente a

$$x=\frac{13\times4}{17}\times1200=3670\,\frac{10}{17}.$$

Non bisogna in casi simili dimenticar questa pratica, che rendendo il calcolo più semplice, lo rende anche più breve e meno soggetto ad errori: principali oggetti da aversi in mira in ogni calcolazione.

Finalmente conviene avvertire che in tutte le proporzioni stabilite non si fa altro che cambiare i rapporti dati in altri rapporti egua-

li, ma dati da una serie di termini continui, de' quali il primo è il termine solitario e l'ultimo è quello che si cerca; perciò la ragione del primo all'ultimo è la composta (n° 172) di tutte le ragioni intermedie.

Dietro l'idea della ragione composta ne risulta immediatamente la regola precedente.

§. III. *Della Regola congiunta.*

183. Questa regola ha grandissima relazione con quella del tre composta. La quistione seguente sarà bastante a farne conoscer l'oggetto.

XI. *Una persona vuol cambiare del zucchero in pepe. Conoscendo che* 20 *libbre di zucchero si possono cambiare con* 13 *di caffè*, 25 *libbre di caffè con* 12 *di cannella*, 2 *libbre di cannella con* 5 *di tè*, *e* 6 *libbre di tè con* 7 *libbre di pepe; si vuol sapere quanto pepe può aversi per* 32 *libbre di zucchero.*

Chiamando x la quantità di pepe richiesta, e x^{I}, x^{II}, x^{III} le quantità di caffè, cannella, e tè che sarebbero rispettivamente eguali alle 32 libbre di zucchero, è evidente che si potranno stabilire le proporzioni seguenti:

$$\overset{z}{20} : \overset{c}{13} :: \overset{z}{32} : x' ,$$
$$25 : 12 :: x' : x'' ,$$
$$2 : 5 :: x'' : x''' ,$$
$$6 : 7 :: x''' : x .$$

Moltiplicandole, termine per termine, e omettendo di scrivere i fattori comuni x^{I}, x^{II}, x^{III}, si avrà

$$20 \times 25 \times 2 \times 6 : 13 \times 12 \times 5 \times 7 :: 32 : x ,$$

d'onde ricavasi

$$x = 32 \times \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{6} = 29\,\frac{5}{25} ,$$

cioè libbre 32 di zucchero valgono quanto libbre $29\frac{5}{25}$ di pepe.

Per risolver questa quistione si poteva ancora adoperare un ragionamento diverso, ma conducente al medesimo scopo. Di fatto se 20 libbre di zucchero equivalgono a 13 di caffè, 1 libbra di zucchero sarà eguale a una quantità di caffè espressa da $\frac{13}{20}$ di libbra. Per la stessa ragione 1 libbra di caffè sarà eguale a libbre $\frac{12}{25}$ di can-

nella ; e così per gli altri. Sí avrà dunque

$$1 \text{ lib. di zucc.} = \text{lib.} \frac{13}{20} \text{ di caf.},$$
$$1 \text{ lib. di caf.} = \text{lib.} \frac{12}{25} \text{ di can.}$$
$$1 \text{ lib. di can.} = \text{lib.} \frac{5}{2} \text{ di tè},$$
$$1 \text{ lib. di tè.} = \text{lib.} \frac{7}{6} \text{ di pepe.}$$

Per conseguenza si troverà la quantità di cannella che equivale a 1 libbra di zucchero prendendo i $\frac{13}{20}$ di $\frac{12}{25}$, e così per gli altri. Si avrà in generale

$$1 \text{ lib. di zuc.} = \text{lib.} 1\frac{13}{20} \text{caf.} = \text{lib.} \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \text{ can.}$$

$$= \text{lib.} \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{2} \text{ tè} = \text{lib.} \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{6} \text{ pepe.}$$

E quindi

$$32 \text{ lib. di zuc.} = 32 \times \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{6} \text{ lib. di pepe:}$$

risultamento identico al precedente.

In qualunque modo si ragioni, si vede: 1° che la regola ha per oggetto di trovare la quantità di una cosa che equivalga ad una quantità data di un'altra cosa di diverso genere, conoscendosi una serie di rapporti fra cose di diverso genere, ne' quali quelle da paragonarsi occupano gli estremi: 2° che si risolve il problema, moltiplicando fra loro i rapporti che legano le due quantità da paragonarsi, e formandone un rapporto composto che si moltiplicherà per il termine della domanda, cioè per la quantità data di cui si cerca l'equivalente.

184. Questa regola si applica più frequentemente al cambio delle monete. Eccone un esempio.

XII. *Si tratta di convertire in lire sterline una somma di ducati* 2000 *di Napoli, sapendo che* 55 *ducati di Napoli equivalgono a* 45 *scudi romani, che* 5 *scudi fanno* 29 *franchi, che* 13 *franchi fanno* 5 *fiorini, che* 87 *fiorini equivalgono a* 11 *federici di Prussia, che* 389 *federici fanno* 195 *imperiali di Russia, che* 38 *imperiali fanno* 63 *lire sterline* (*).

(*) Questi rapporti non sono esatti, essendosi supposti a solo oggetto di proporre un esempio di questo genere. Del resto i rapporti tra le monete variano a seconda del *cambio*, il quale dipende da diverse condizioni commerciali.

Chiamando x la quantità di lire sterline equivalente alla somma di ducati 2000, si avrà secondo la regola,

$$x = 2000 \times \frac{43}{35} \times \frac{29}{5} \times \frac{5}{13} \times \frac{11}{87} \times \frac{195}{389} \times \frac{63}{38}.$$

Sopprimendo i fattori comuni, si ottiene

$$x = 2000 \times \frac{43 \times 63}{389 \times 38},$$

ovvero

$$x = 2000 \times \frac{2709}{14782},$$

ed in fine

$$x = 366 \frac{3894}{7391} \text{ lire sterline.}$$

E siccome 1 lira sterlina si divide in 20 *scellini*, uno scellino in 12 *pences*, 1 *pence* in 4 *farthings*, sarà prossimamente

$$x = 366^{\text{lir. st.}}\ 10^{\text{scel.}}\ 6^{\text{pen.}}\ 2^{\text{fart.}};$$

la qual somma equivale a 2000 ducati di Napoli.

La frazione $\frac{2709}{14782}$ esprime il rapporto che il ducato ha colla lira sterlina. Convertendola in decimali, si ha 0,183263... che è il numero per lo quale bisognerebbe moltiplicare una somma di ducati per convertirla in lire sterline. Viceversa il rapporto $\frac{14782}{2709} = 5,4566\ldots$ servirebbe per convertire in ducati una somma qualunque di lire sterline.

§. IV. *Problemi d'interesse, e regola di sconto.*

185. Il danaro può esser impiegato o per l'acquisto di un podere o per una speculazione commerciale, o per lo stabilimento di una manifattura, ec. Allorchè il danaro è bene impiegato, alla fine di un certo tempo si ottiene un prodotto componente una somma maggiore della primitiva. Ma per poter conseguire questo intento, è necessario che il denaro si trovi nelle mani di chi sa renderlo un capitale produttivo.

Avviene spesso che chi possiede i mezzi da impiegare il danaro in un modo produttivo manca di capitale; allora prende il danaro in prestito. In questo caso è necessario che egli si obblighi dopo un certo tempo non solo di restituire per intero la somma ricevuta, ma anche di aggiungervi un' altra somma che serve a compensare il prestatore de' vantaggi che avrebbe egli ritirato se avesse diretta-

mente impiegato il suo capitale. La somma che si dà in prestito si chiama *capitale* o *sorte principale*, la somma che si paga di soprappiù per vantaggio del prestatore si chiama *frutto o interesse.*

L'interesse ordinariamente si calcola al tanto per 100 all'anno; così dicendo al 6 per 100 s'intende che per ogni 100 ducati si ha in un anno il frutto di 6 ducati, cioè che se uno prestasse ducati 100, dopo un anno dovrebbe ritirarne 106 (*).

Tutti i problemi d'interesse si risolvono colla regola del tre (n° 176). Per es. si domandi quanto sarà il frutto di ducati 384 al 6 per 100. Si farà la proporzione

$$100 : 6 :: 384 : x.$$

Osservando che il primo rapporto si può ridurre a quello $1 : 0{,}06$, si avrà subito $x = 384 \times 0{,}06 = 23{,}04$. Ma 0,06 è l'interesse di un ducato; perciò si ottiene l'interesse di una data somma moltiplicandola per l'interesse di un ducato.

Si otterrà sempre ne' problemi di questa natura che uno de' termini della proporzione sia 1, qualora l'interesse si prenda sull'unità; in questo caso la ricerca del termine incognito si riduce ad una moltiplicazione o ad una divisione.

181. Se si cercasse il capitale corrispondente ad una data rendita, siccome il frutto è il prodotto del capitale per l'interesse di un ducato (n° prec.), per ottenere la sorte principale bisogna dividere la rendita data per l'interesse di un ducato. Per conseguenza il capitale corrispondente ad una rendita di duc. 64 al 5 per 100 è espresso da $\frac{64}{0{,}05} = 1280$.

182. Se si cercasse quanto vale dopo un anno la somma di 384 ducati al 6 per 100, si dirà: se 100 ducati divengono 106 dopo un anno, quanto diverranno 384 ducati? il che dà luogo alla seguente proporzione;

$$100 : 106 :: 384 : x \text{, ovvero } 1 : 1{,}06 :: 384 : x,$$

da cui $x = 384 \times 1{,}07 = 407{,}04$. Si ottiene dunque il valore di una somma dopo un anno moltiplicandola per l'unità accresciuta del suo interesse.

Viceversa, se volesse sapersi quanto vale attualmente una somma da ritirarsi dopo un anno, bisogna evidentemente dividerla per l'unità più il frutto corrispondente all'unità. Per es., la somma di duc. 358 da ritirarsi dopo un anno non vale attualmente (l'interesse al 6 per 100) che $\frac{358}{1{,}06} = 337{,}73$.

(*) I negozianti scrivono *per* $\frac{0}{0}$ invece di *per* 100.

In generale supponendo che il possessore di una somma di danaro abbia sempre il modo da impiegarla, allorchè non ne può disporre che dopo un certo tempo, il valore *reale* della somma è minore del valor *nominale*; in guisa che il possedere anticipatamente una somma fa crescer il suo valor reale.

183. Se il tempo che deve scorrere fosse minore di un anno, siccome nell'enunciato l'interesse suol rapportarsi all'anno, per mezzo di una proporzione si troverebbe l'interesse corrispondente all'epoca data.

Si domandi per es. quanto varrà la somma di duc. 581 da ritirarsi dopo 8 mesi, al 6 per 100. Si dirà: se per un anno o 12 mesi l'interesse è 6, per 8 mesi quanto sarà? il che dà luogo alla proporzione $12 : 8 :: 6 : x = \frac{48}{12} = 4$. La somma 581 da ritirarsi dopo 8 mesi varrà attualmente $\frac{581}{1,04} = 558,65$.

184. Allorchè il tempo dopo il quale deve pagarsi o ritirarsi una data somma passa l'anno, ordinariamente si calcola l'interesse anche sull'interesse. Per es. la somma 500 al 6 per 100 dopo un anno diviene $500 \times 1,06$ ossia 530; questa somma alla fine del secondo anno sarà divenuta $530 \times 1,06$ ossia $500 \times 1,06 \times 1,06$; alla fine del terzo sarà $500 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06$, ec.; e ben si vede che bisogna moltiplicare tante volte la somma primitiva pel capitale più l'interesse corrispondente all'unità, per quanti anni sono scorsi.

Al contrario, se vuol sapersi quanto vale attualmente una somma da ritirarsi dopo un certo numero di anni, bisogna dividerla tante volte pel capitale 1 più il suo interesse, per quanti anni debbono scorrere. Così la somma 690 da ritirarsi dopo 3 anni, calcolando l'interesse al 6 per 100, non vale attualmente che
$\frac{690}{1,06 \times 1,06 \times 1,06} = 579,34$.

Moltiplicando più volte di seguito una somma qualunque per 1,06 si troverà che si raddoppia dopo 12 anni circa; quindi una somma da ritirarsi dopo anni 12 non vale attualmente che circa la metà.

185. Dicesi *cambiale* una carta nella quale un negoziante promette il pagamento di una somma ad un epoca determinata. Se il possessore della cambiale vuol ricever la somma prima del tempo, ossia prima della *scadenza*, colui che sborsa il denaro non deve dare l'intera somma, ma una minore, affinchè nel rimborso della somma contenuta nella cambiale egli ritrovi il suo capitale e il frutto corrispondente. La somma che il negoziante ritiene sulla cambiale, in commercio si chiama *sconto*; e i problemi seguenti son relativi alla *regola di sconto*.

XIII. *Una cambiale di duc. 1370 deve scontarsi al 6 per 100 nove mesi prima della scadenza; quanto deve pagare il banchiere che riceve la cambiale?*

Siccome 1370 è una somma che deve ritirarsi dopo 9 mesi, at-

tualmente non varrà che $\frac{1370}{1,045}$ ossia 1311 (n° 182); e questa è la somma che deve sborsarsi dal banchiere. La differenza tra il valor della cambiale e la somma che si paga, cioè 59, è lo sconto.

I negozianti sogliono per maggior facilità usare un metodo non esatto; cioè calcolano l'interesse corrispondente al valor nominale della somma, e lo deducono dalla somma stessa. Così nell'esempio precedente l'interesse per 1370 è $1370 \times 0,045 = 61,65$. Quindi la somma che pagano è 1308,65. L'errore sta in questo, che in vece della proporzione $104,5 : 100 :: 1370 : x$ si servono dell'altra proporzione $100 :: 95,5 :: 1370 : x$. Questa pratica inesatta favorisce il compratore della cambiale, e si dice che lo sconto si prende *in fuori* e non *in dentro* come richiede la regola esatta.

Si può anche proporre sullo sconto il problema inverso, del genere di quello che segue.

XIV. *Per una cambiale di* 689 *pagabile dopo* 9 *mesi si è pagata attualmente la somma di duc.* 650; *a qual ragione è stata scontata la cambiale?*

È chiaro che siccome la somma 689 divisa pel capitale 1 più l'interesse deve dare la somma sborsata, dividendo 689 per 650 si dovrà avere il capitale 1 più l'interesse. Ora $\frac{689}{650} = 1,06$; in conseguenza l'interesse di un ducato per 9 mesi è 0,06; e per un anno sarà 0,08, ossia l'interesse è stato all' 8 per 100.

Si poteva anche dividere l'eccesso di 689 sopra 650, cioè 39 per 650, e si sarebbe ottenuto immediatamente 0,06.

Se si volesse nel problema precedente conoscere a che ragione riviene l'interesse collo sconto preso in fuori, si avrà $\frac{1370}{1308,65} = 1,0468$; quindi l'interesse per 9 mesi è 4,68, e per un anno è 6,24, cioè circa al $6\frac{1}{4}$ per 100.

§. V. *Regola di Società.*

186. Basterà il seguente problema per mostrare l'oggetto di questa regola, e l'origine del nome.

XV. *Tre persone hanno riunito i loro capitali per fare un negozio. Il primo ha messo ducati* 2700, *il secondo ducati* 3700, *il terzo ducati* 3200. *Hanno guadagnato* 2574 *ducati; si domanda qual porzione di guadagno spetta a ciascuno.*

Riunendo i tre capitali si ha il capitale totale 9600. Ora è chiaro che se uno avesse messo la metà del capitale avrebbe dritto alla metà del guadagno, se la terza parte del capitale avrebbe dritto alla metà del guadagno, ec. Dunque il rapporto che il capitale di ciascuno serba col capitale totale dev'esser eguale al rapporto che il guadagno di ciascuno ha col guadagno totale. Chiamando x, y, z

i guadagni di ciascuno, si avranno le seguenti proporsioni:

$$9600 : 2700 :: 2574 : x ,$$
$$9600 : 3700 :: 2574 : y ,$$
$$9600 : 3200 :: 2574 : z .$$

Da queste proporzioni, ricavando i valori di x, y, z, si ha $x = 723,93\frac{3}{4}$, $y = 992,06\frac{1}{4}$, $z = 858$.

Osservando le proporzioni di sopra, si vedrà che gli antecedenti sono comuni; sicchè permutando diverranno

$$9600 : 2574 :: 2700 : x ,$$
$$9600 : 2574 :: 3700 : y ,$$
$$9600 : 2574 :: 3200 : z ,$$

le quali hanno di comune il primo rapporto. Questo primo rapporto può mettersi sotto la forma $1 : \frac{2574}{9600}$, e allora non si tratterà che di moltiplicare i capitali parziali per $\frac{2574}{9600} = \frac{429}{1600}$; dal che si ricava che dividendo il guadagno totale pel capitale totale, si ha un *modulo* pel quale motiplicando tutti i capitali parziali si hanno i guadagni parziali. Per es. se i capitali sono 131, 188, 394, 233, ec.; il capitale totale 8534, e il guadagno totale 794, si ottengono tutti i guadagni parziali moltiplicandoli per $\frac{794}{8534} = 0,09304$. Questo numero che esprime il guadagno spettante per ogni ducato di capitale dev'esser preso con tanto maggior numero di cifre decimali quanto più grandi sono i capitali parziali.

La somma di tutti i guadagni parziali dovendo esser uguale al guadagno totale, si può ottenere l'ultimo guadagno, sottraendo dal guadagno totale la somma di tutti quelli ottenuti. Sarà però meglio trovarli tutti, e far la somma de' guadagni parziali per assicurarsi dell'esattezza delle operazioni.

187. È importante per l'esattezza de' risultamenti e per la brevità del calcolo che i capitali parziali non sieno molto grandi. Nelle grandi associazioni in vece del ducato si prende per unità un numero rotondo sufficientemente grande che può esser 50, 100, 200, ec., la quale unità si chiama *azione* o *messa*. I socii dovendo metter nel negozio de' capitali che sien multipli dell'azione, il guadagno si riferirà al numero delle azioni e non al capitale; dal che risulta che il numero delle azioni essendo molto minore della somma effettiva, il modulo può esser preso con minor numero di cifre decimali. Per es. si tratti di una Società in cui le azioni sono di ducati 200, e i capitali de' Socii sieno 1600, 2800, 3200, ec., si vede che le azioni saranno rispettivamente 8, 14, 16, ec.; e se il

capitale è 80000 e il guadagno 4720, siccome il capitale contiene 400 azioni, il modulo per cui bisogna moltiplicare il numero delle azioni di ciascun Socio per aver il guadagno rispettivo sarà $\frac{4720}{400} = 11{,}80$.

188. Qualche volta avviene che i capitali non sono tenuti in commercio per la stessa durata del tempo, e si domanda il guadagno di ciascuno tanto per ragion del tempo quanto pel valore del capitale. È facile in questo caso ridurre il problema al precedente, riportando tutti i capitali alla stessa unità di tempo.

Suppongasi che A abbia messo in società ducati 300 per 7 mesi, B ducati 460 per 5 mesi, e C ducati 800 per 9 mesi. È chiaro che tanto è mettere ducati 300 e tenerli per 7 mesi, quanto è mettere un capitale sette volte più grande e tenerlo per un mese; così pel secondo, tanto è un capitale 460 tenuto per 5 mesi, quanto un capitale quintuplo tenuto per un mese. E perciò nella quistione proposta i capitali de' tre soci tenuti per un mese sono 2100, 2300 7200. Dopo di ciò si segue la regola.

189. Dal fin qui detto si rileva che questa regola ha per oggetto di dividere un numero dato in parti che abbiano tra loro de' rapporti dati. Per es. nel primo problema si tratta di dividere il numero 2574 in tre parti che sien fra loro come i tre numeri 2700, 3700, 3200. Chiamando x, y, z, queste tre parti, dev'esser $2700 : 3700 : 3200 :: x : y : z$. Ma in una serie di rapporti eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente a un conseguente (n° 168), e osservando che la somma delle tre parti x, y, z, dev'esser eguale a 2574, si avrà come sopra

$$6900 : 2700 :: 2574 : x,$$

ec.

A questa regola dunque si riferiscono tutti i problemi, ne' quali si tratta di dividere un numero in parti che sieno fra loro in dati rapporti. Ecco un altro problema di questa natura.

XVI. *Si deve dividere un'eredità di ducati 20000 fra quattro eredi, in modo che il secondo abbia i $\frac{3}{4}$ della porzione del primo, il terzo abbia i $\frac{7}{8}$ della porzione del secondo, e il quarto abbia il terzo della somma delle porzioni del primo e del terzo.*

È chiaro che la parte del terzo paragonata a quella del primo ne sarà i $\frac{7}{8}$ di $\frac{3}{4}$ cioè i $\frac{21}{32}$, e la parte del quarto paragonata pure a quella del primo sarà il terzo di $1 + \frac{21}{32}$, cioè $\frac{53}{96}$. Le parti che spettano a ciascuno saranno fra loro come i numeri 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{21}{32}$, $\frac{53}{96}$. Ri-

ducendo allo stesso denominatore saranno come i numeri

$$\frac{96}{96}, \frac{72}{96}, \frac{63}{96}, \frac{53}{96},$$

ovvero come i numeri 96, 72, 63, 53. La loro somma è 284. Si avranno dunque le porzioni di ciascuno prendendo le parti $\frac{96}{284}, \frac{72}{284}, \frac{63}{284}, \frac{53}{284}$ di 30000, ovvero moltiplicando i numeri 96 72, 63, 53 pel modulo $\frac{30000}{284}=105,6338$, il che darà le somme dovute agli eredi secondo la distribuzione prescritta, cioè

10140,84, 7605,63, 6654,83, 5598,59.

§. VI. Della regola di alligazione.

190. Questa regola ha per oggetto di trovare il valor medio di più cose dello stesso genere ma di prezzi diversi, conoscendo il numero e il valore di ciascuna specie. Ecco un problema.

XVII. *Un mercante possiede del vino di diverse qualità*, *cioè*

130	bottiglie	a grana 10 l'una,
120		a grana 8,
250		a grana 13,
605		a grana 12,

mescolandole, si vuol sapere a quanto riviene il prezzo di una bottiglia del vino mescolato.

È chiaro che

130	bottiglie	a 10 grana l'una costano	1300 grana
120		a 8	960
250		a 13	3250
605		a 12	7260
dunque 1105	bottiglie	. . . . costano	12770

Dividendo 12770 per 1105 si ha 11,55 che sarà il prezzo di una bottiglia del mescuglio.

Si potrebbe su questa regola proporre il problema inverso. Per es. avendosi del vino di 10, 12, 8 grana la bottiglia, si vuol sapere qual porzione si deve prender di ciascuna specie per formare una miscela che costi grana 9 la bottiglia. Ma questo problema non può risolversi senza il soccorso dell'algebra.

191. Il nome di regola di alligazione deriva dall'essersi essa applicata in origine al mescuglio de' metalli che con termine proprio si chiama *lega*. L'oro e l'argento di cui si fa uso per oggetti di commercio e per la moneta non si trova mai puro, ma vi si mescola una

porzione di rame che si chiama la *lega*. Il rapporto tra il peso totale e il peso della parte di fino si chiama *titolo*. Si dice dunque che una massa d'argento è a $\frac{9}{10}$ *di fino*, ovvero al *titolo* $\frac{9}{10}$, quando per ogni unità di peso si contengono $\frac{9}{10}$ di argento puro. Parimente quando si dice che il titolo delle monete di oro è 996 millesimi, s'intende che per ogni unità di peso vi sono $\frac{996}{1000}$ di oro puro, o che in 1000 parti 996 son di oro puro. Ecco un problema relativo alla lega dei metalli.

XVIII. *Si vogliono fondere tre verghe di argento, la prima del peso di 14 libbre e del titolo* 0,854, *la seconda di 11 libbre e del titolo* 0,852, *la terza di 18 libbre e del titolo* 0,894. *Si vuol sapere quale sarà il titolo della miscela.*

Ora si ha dell'enunciato.

14lib.	a 864 millesimi	fanno	$14 \times 0,864 = 12,096$
11lib.	a 852 mill.	fanno	$11 \times 0,852 = 9,372$
18lib.	a 894 mill.	fanno	$18 \times 0,894 = 16.092$
43			37,560

Dunque nelle 43 libbre del miscuglio si contengono 37,56 libbre di argento puro. E perciò il titolo del miscuglio sarà $\frac{37,56}{43}$, ovvero 0,873, ossia che per ogni libbra del miscuglio si contengono 873 millesimi di fino.

192. Trattandosi di misurare la distanza fra due punti assai lontani, per quanta cura si porti nella operazione, vi è sempre da dubitare dell'esattezza del risultamento, a causa degli errori che possono provenire dalle misure parziali e da tante altre cause. Si costuma allora di ripeter più volte l'operazione, e quando s'incontrano de' risultamenti diversi, non essendovi ragione di creder esatto l'uno piuttosto che l'altro, si prende un medio fra essi.

Supponghasi a modo di esempio che misurata la distanza fra due punti siasi trovata due volte eguale a pal. 5434,32, che tre volte siasi trovata di pal. 5433,98, e che finalmente due altre volte siasi rinvenuta di pal. 5434,13. È chiaro che per aver il risultamento medio, si ripeterà due volte la prima misura, tre volte la seconda, due volte la terza, e poi si dividerà la somma per 7. Si ha dunque

$$2 \times 5434,32 = 10868,64$$
$$3 \times 5433,98 = 16301,94$$
$$2 \times 5434,13 = 10868,26$$

in tutto 38038,84

Dividendo questa somma per 7, si ha per misura media 5434,12.

CAPO IX.

CALCOLO PER APPROSSIMAZIONE. ABBREVIAZIONI NE' CALCOLI.

193. Allorchè un numero è approssimato per mezzo de' decimali, il numero delle cifre decimali necessarie è determinato dalla natura e grandezza dell'unità, non che dall'uso che deve farsi del numero. Suppongasi per es. che il numero 37,54726 esprima palmi, è chiaro che le due o tre ultime cifre possono risultare inutili negli usi ordinari, essendo impossibile tener conto delle parti millesime del palmo nel prender le misure.

Quando adunque si debbono trascurare le ultime cifre di un numero che contiene decimali, affinchè l'errore sia il più piccolo possibile si aumenta di un'unità l'ultima delle cifre che restano, quando quelle che si trascurano formano più di una mezza unità dell'ordine infimo di quelle che si conservano, ossia quando la prima delle cifre trascurate è maggiore di 5. Suppongasi per es. che il numero 3,75832 si debba adoperare con due sole decimali.; si cancelleranno le ultime tre cifre, e si aumenterà di un'unità l'ultima delle cifre rimaste, e si avrà 3,76. In effetti quel numero è compreso fra 3,75 e 3,76; ma siccome è più vicino a quest'ultimo che all'altro, l'errore che può provenire dalle cifre trascurate è minore quando si ritiene il numero 3,76. Al contrario pel numero 2,5834, trascurando le due ultime cifre si riterrà lo stesso numero 2,58. Il primo è approssimato per *eccesso*, il secondo per *difetto*.

Si debbono nondimeno cancellare da un numero le cifre decimali inutili, quando questo sia il risultamento finale di una operazione, qualunque; giacchè se su quel numero si dovessero eseguire delle moltiplicazioni o delle divisioni, le cifre trascurate potrebbero influire grandemente sul valore del prodotto o del quoziente, come or ora si farà vedere.

194. Nel moltiplicare due numeri che contengono cifre decimali, il prodotto ha tante cifre decimali per quante se ne contengono nei due fattori. Or quando nel prodotto non bisognano tutte le cifre decimali si può render più breve l'operazione, prendendo i prodotti parziali con tante cifre decimali quante se ne cercano nel prodotto totale. Sia per es. da moltiplicarsi 57,358475 per 74,985. e si voglia il prodotto con sole tre cifre decimali. In vece di avere il prodotto totale e cancellare le ultime sei cifre, si possono fin da principio conservar ne' prodotti parziali le sole cifre che bisognano. Gioverà in tal caso eseguir la moltiplicazione partendo dalla sinistra del moltiplicatore, e cominciare i prodotti parziali da quella cifra del moltiplicando che dà nel prodotto unità dell'ordine da conservarsi. È necessario però calcolar nel prodotto una cifra di

più di quelle che si cercano, perchè l'ultima cifra del prodotto così ottenuto non può esser mai esatta a causa di ciò che si riporterebbe dalla colonna precedente che non è scritta. Nel caso attuale adunque bisogna ottenere il prodotto con quattro decimali per conservarne tre solamente. Fa d'uopo inoltre per maggior esattezza aggiungere alla prima cifra di ogni prodotto parziale ciò che si riporterebbe dal prodotto della precedente cifra trascurata, avvertendo anche di prender questa parte da aggiungersi, ora in più ora, in meno, secondo la regola assegnata (n° prec.). La sola difficoltà sta nel determinare la cifra del moltiplicando, dalla quale deve cominciare il prodotto parziale della prima cifra del moltiplicatore a sinistra; giacchè per gli altri prodotti, ciascuno dovrà cominciare nel moltiplicando dalla cifra a sinistra di quella da cui si è cominciato il precedente. Si toglie subito questa difficoltà riducendo il moltiplicatore a non aver che una sola cifra dal lato degl'interi. Quindi i due numeri dati si convertiranno in 573,58475 e 7,4985. Siccome il prodotto del moltiplicando per la cifra delle unità del moltiplicatore deve dare nel prodotto unità dello stess'ordine di quelle del moltiplicando, volendosi nel prodotto solamente quattro cifre decimali, il primo prodotto parziale comincerà dalla quarta decimale del moltiplicando, cioè dalla cifra 7; il prodotto per 4 comincerà dalla cifra 4 a sinistra della precedente; il prodotto per 9, dalla cifra 8 a sinistra di 4; e così di seguito. Ogni prodotto parziale così ottenuto si comincerà a scriver sempre sotto la prima cifra a destra del primo prodotto parziale; siccome si vede nell'esempio che segue.

```
573,58475
   7,4985
---------
4015,0932   prodotto per 7 aumentato di 3
 229,4339   . . . . . . . 4 . . . . . . . 3
  51,6226   . . . . . . . 9 . . . . . . . 4
   4,5886   . . . . . . . 8 . . . . . . . 6
     2868   . . . . . . . 5 . . . . . . . 2
---------
4301,025
```

Ecco un altro esempio, in cui si cerca il prodotto con quattro cifre decimali esatte.

```
 3695,427
    7,5489
----------
25867,989
 1847,7133
  147,81708
   29,56342
    3,32588
----------
27896,4089
```

Per non cadere in equivoco sulla cifra del moltiplicando da cui deve

cominciarsi ogni prodotto parziale, si potrà segnare con un punto la cifra da cui si è cominciato il prodotto parziale precedente.

Si potrebbe ancora scrivere la cifra delle unità del moltiplicatore sotto la cifra del moltiplicando da cui deve cominciare il primo prodotto parziale, e scriver poi le altre cifre in ordine inverso, secondo la disposizione che si vede a fianco, data ai fattori del primo esempio; ogni cifra del moltiplicatore si troverà scritta in corrispondenza di quella del moltiplicando da cui deve cominciarsi il prodotto parziale.

573,58475
5,8947

195. Questo modo di operare nella moltiplicazione non solo è utile quando nel prodotto non sono necessarie le ultime cifre decimali, ma anche quando i fattori son dati per approssimazione. Riprendendo nuovamente il primo esempio, si supponga che i numeri dati 57,358475 e 74,985 non sieno esatti ma approssimati. Ciascuno di essi potrà differire dal vero valore, in più o in meno, per circa $\frac{1}{2}$ dell'unità dell'ultimo ordine contenuto in ciascuno. Si faccia per poco astrazione dalla virgola. Se il moltiplicatore fosse $57358475 + \frac{1}{2}$ e il moltiplicatore $74985 + \frac{1}{2}$, il prodotto sarebbe uguale ai quattro prodotti (n° 94)

$57358475 \times 74985 + 57358475 \times \frac{1}{2} + 74985 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, sicchè la differenza di questo prodotto da quello di 57358475 per 58947 può esser nel caso più sfavorevole quanto la semisomma de' due fattori, la quale ha tante cifre quante ne contiene il numero più grande o una di meno. In questo esempio il prodotto totale ha 13 cifre (n° 29), il moltiplicando ne ha 8; dunque le ultime otto cifre non vengono esatte, per cui è inutile trovarle.

Se un solo de' fattori fosse approssimato, sarà facile conoscere, che il numero delle ultime cifre erronee del prodotto può esser quanto quelle di cui si comporrebbe il fattore esatto diviso per 2. Nel secondo esempio il prodotto totale ha 12 cifre; suppongasi che il solo moltiplicando sia approssimato; siccome il moltiplicatore diviso per 2 ha 5 cifre, non si può contare sull'esattezza delle ultime 5 cifre del prodotto. In questo caso sarebbe inutile trovare il prodotto al di là de' decimi, e quindi coi due fattori dati non si potrebbe avere un prodotto che desse un'approssimazione maggiore de' decimi.

196. Quando nella divisione è determinato anticipatamente il numero delle cifre che si cercano nel quoziente, questa operazione ammette un compendio analogo a quello usato per la moltiplicazione; cioè in vece di calar le cifre del dividendo, o pure aggiunger degli zeri al resto, si possono andar sopprimendo le cifre del divisore.

Ecco un esempio.

```
19561749,3'7' |   . . . .
 1692109 3 3  | 3 573928
  262538 1 7  |----------
   12363 2 1  | 5,473459
    1641 4 3
     211 8 6
      33 1 7
```

Dopo aver trovate le prime tre cifre del quoziente, in vece di aggiungere un zero al resto 1236321, si sopprime la prima cifra 8 del divisore, e dividendo questo numero per 357392 si ha 3 nel quoziente.

Nel far il prodotto di 357392 per 3 bisogna usare la solita avvertenza di aggiungere a questo prodotto ciò che si riporterebbe dal prodotto della cifra 8 trascurata, preso sempre in più o in meno, secondo si è detto al n° 194. Si ottiene il resto 164143; si sopprime un'altra cifra nel divisore, e si divide questo numero per 35739; si ha nel quoziente la cifra 4 e si opera al solito, aggiungendo sempre al prodotto di 35739 per 4 ciò che si riporterebbe dalla cifra a destra che si trascura. Continuando a questo modo, si perviene finalmente al dividendo parziale 3317 che diviso per 357 dà 9 per ultima cifra del quoziente. Non dovendosi più proseguire l'operazione, è inutile scriver l'ultimo resto.

Poichè le prime due o tre cifre del dividendo bastano ordinariamente per decidere quante volte il divisore vi è contenuto, e le cifre che si trascurano nel divisore non influiscono che sulle ultime cifre de' dividendi parziali, specialmente quando ad ogni prodotto si aggiunge la ritenuta proveniente dalla cifra trascurata, si potrà regolare l'operazione in modo da finire con un divisore di due o di tre cifre, secondo che le cifre che nel divisore seguono la prima a sinistra sono rispetto a questa piccole o grandi. In conseguenza avendo determinato da principio quante cifre bisognano nel quoziente, si saprà a quale dividendo parziale si può cominciare a sopprimere le cifre del divisore. Le quali a misura che si trascurano si segnano con un punto, come si vede nell'esempio.

197. Se il dividendo o il divisore non sono esatti, il metodo precedente fa conoscer quante cifre esatte si possono ottener nel quoziente; imperocchè basta regolar l'operazione in modo da non far uso delle cifre trascurate. Quindi se il dividendo ha più cifre del divisore, il divisore si dovrà considerare come ridotto; e perciò formato il primo dividendo parziale, e ottenuta la prima cifra del quoziente, in vece di calar le altre cifre del dividendo, si andranno successivamente sopprimendo quelle del divisore. Se poi il divisore ha più cifre del dividendo, bisognerà prima *ridurre* il divisore, staccando a destra il minimo numero di cifre necessarie per far che sia contenuto nel dividendo, e poi si continuerà al solito. Per es. debba di-

vedersi 457,93283 per 75,38. Si vede che le tre ultime cifre del dividendo sono inutili; e si tratterà di divider col metodo precedente 4679,3 per 7538.

Ecco l'operazione

4679,3283	7538
174 5	0,625
23 8	
1 2	

Similmente dovendo divider 3,754 per 283,5842, le ultime tre cifre del divisore sono inutili; e si dividerà 37,54 per 2835.

198. Le frazioni decimali, per quanto pregevoli sono allorchè trattasi di esprimere per approssimazione il risultamento finale di un calcolo, riescono incomode o poco acconcie, quando non sono esatte e su di esse debbonsi eseguire altre operazioni. In generale le frazioni ordinarie riescono di un uso più spedito delle frazioni decimali, quando alle decimali si possono sostituir frazioni ordinarie molto semplici.

Così se nella moltiplicazione uno de' fattori contiene una frazione decimale periodica, è sempre più breve sostituire ad essa la frazione ordinaria corrispondente. Sia per es. da moltiplicarsi 37583 per 2,6666 ... Se alla frazione 0,6666 ... si sostituisce la frazione ordinaria corrispondente $\frac{2}{3}$, si ha subito il prodotto qui sotto notato.

$$\begin{array}{r} 37583 \\ 2\frac{2}{3} \\ \hline 75166 \\ 12527\frac{2}{3} \\ 12527\frac{2}{3} \\ \hline 100221\frac{1}{3} \end{array}$$

Parimente se si avesse da far la moltiplicazione di 237,8333..., per 5,478; sostituendo $\frac{1}{3}$ alla frazione periodica da cui è seguita la cifra de' decimi, si fa subito l'operazione come qui appresso.

$$\begin{array}{lr} & 237,8\frac{1}{3} \\ & 5,478 \\ \hline & 19024 \\ & 16646 \\ & 9512 \\ & 1189,0 \\ \text{prod. per } \frac{1}{3} & 1826 \\ \hline & 1302,851 \end{array}$$

Facendo uso delle frazioni decimali periodiche, per avere il prodotto esatto vi è bisogno di un tempo più lungo e di molta avvedutezza. Le due operazioni precedenti dovrebbero essere eseguite e regolate secondo si vede qui sotto.

```
     37583
       2,666. . .
   ---------------
     75166
     22549,8
      2254,98
       225,498
        22,549
         2,254
           225
            22
             2
   ---------------
   100221,333. . .
```

```
     237,833333. . .
       5,477
   ------------------
    1189,166666. . .
      95,133333. . .
      16,648333. . .
       1,902666. . .
   ------------------
    1302,831
```

Da ciò si conchiude, che se per alcuni casi dee preferirsi il metodo di convertire le frazioni ordinarie in decimali, ciò servirebbe in altri casi ad allungare considerevolmente l'operazione.

199. Se in una divisione da farsi il divisore è accompagnato da una frazione decimale periodica, bisogna sostituire ad essa la frazione ordinaria corrispondente; giacchè non potendosi far uso di un numero infinito di cifre, quelle trascurate influiranno necessariamente sul quoziente, il quale non potrebbe perciò avere che un numero limitato di cifre esatte. Per es. dovendosi dividere 37543 per 23,8666.., sostituendo $\frac{2}{3}$ alla frazione decimale periodica si tratterà di dividere 37543 per $23,8\frac{2}{3}$, ossia (nº 46, V.) 1126290 per 816; co' quali numeri per quanto si prolunghi la divisione, si hanno sempre cifre esatte nel quoziente.

Ma se la frazione decimale si trova nel dividendo, e si cerca il quoziente approssimato co' decimali, converrà lasciar di preferenza la frazione decimale periodica, come si vede nell'esempio che segue.

```
735'8'5'2'8'888. . .  | 614
1218                  |--------
 6045                 | 11,984
  5192
   2808
    352
```

L'operazione può continuarsi all'infinito, aggiungendo al resto sempre la cifra 8. Questo esempio mostra come si disse (nº 198), quale grandissimo vantaggio offrono i decimali quando si vogliono esprimere delle quantità per approssimazione.

200. Altri casi, ne' quali l'uso delle frazioni ordinarie può esser preferito alle decimali, si presentano, quando una frazione decimale si può convertire in una frazione ordinaria, che oltre ad esser molto semplice abbia per numeratore l'unità. Avendosi per es. la frazione decimale 0,25 in uno de' fattori, può riuscir più facile in qualche occasione servirsi della frazione $\frac{1}{4}$; avendosi 0,125 si può adoperare $\frac{1}{8}$; e così di seguito.

Poichè la moltiplicazione per $\frac{1}{4}$ equivale alla divisione per 4; la moltiplicazione per $\frac{1}{8}$, alla divisione per 8; e in generale ogni moltiplicazione per una frazione che ha per numeratore l'unità corrisponde ad una divisione; si può il principio precedente applicare quando le ultime cifre di un fattore considerate come decimali corrispondono ad una frazione ordinaria molto semplice.

Sia per es. da moltiplicarsi 52398 per 3125. Si può il moltiplicatore considerare come 3,125, e siccome $0,125 = \frac{1}{8}$, dopo aver fatto il prodotto per 3, in vece di continuare il prodotto per le altre cifre del moltiplicatore, si divide per 8 il moltiplicando, e il quoziente moltiplicato per 1000 darà il prodotto di 52398 per 125.

$$\begin{array}{r} 52398 \\ 3125 \\ \hline 157194 \\ 6724750 \\ \hline 163918750 \end{array}$$

201. Siccome conviene qualche volta cambiar la moltiplicazione in divisione (n° prec.), si potrà ne' casi medesimi cambiar con vantaggio la divisione in moltiplicazione. Si debba per es. dividere 2379 per 125. Siccome $0,125 = \frac{1}{8}$, si moltiplicherà 2379 per 8 e si dividerà per 1000, cioè si staccheranno tre cifre decimali, il che darà 19,032. Parimente 4382 diviso per 5 equivale a 4382×2 diviso per 10; cioè si moltiplica 4382 per 2 e si stacca una cifra decimale, il che dà 876,5.

In generale, siccome il prodotto non cambia allorchè uno de' fattori si moltiplica e l'altro si divide per lo stesso numero, come pure non cambia il quoziente allorchè si moltiplica per lo stesso numero così il dividendo come il divisore (n° 46), converrà far uso di queste proprietà ogni volta che si può render più sempliee il moltiplicatore in un caso, il divisore nell'altro.

Per. es. dovendosi moltiplicare 7428 per 375, convien dividere il primo e moltiplicare l'altro per 4; e così la moltiplicazione si riduce a quella di 1857 per 15, ovvero di 18570 per 1,5, o infine di 18570 per $1\frac{1}{2}$; il che si fa aggiungendo a 18570 la sua metà.

Similmente, allorchè il divisore è terminato dalla cifra 5, è utile moltiplicarlo per 2 e quando è numero pari moltiplicarlo per 5, giacchè così facendo la prima cifra o anche più cifre a destra divengono zeri. Per es. si debba dividere 573497 per 7,625; moltiplicando il divisore prima per 2, si ha 15250, poi un'altra volta per 2 si ha 30500; e un' altra volta per 2 si ha 61000; moltiplicando anche il divi-

dendo per 8 e staccando tre cifre decimali s ha 4587,976 da dividersi per 61: divisione assai più semplice della prima. Parimente si abbia a dividere 375893 per 462: moltiplicando entrambi i numeri per 5 ovvero prendendone la metà, si ha 187946,5 da dividersi per 231.

202. I tentativi da farsi per conoscer quante volte il divisore è contenuto nel dividendo parziale (n° 35) tanto più innanzi debbono spingersi quanto più grandi sono le cifre che seguono la prima a sinistra. Quando la seconda cifra del divisore è piccola o almeno minore di 5, basta ordinariamente la sola prima cifra a sinistra per vedere quante volte il divisore è contenuto nel dividendo parziale. Per questo riguardo conviene qualche volta moltiplicare il divisore per 2, per 3, ec. affinchè si ottenga un divisore che abbia la seconda cifra a sinistra minore di 5. Per es. si debba dividere 875389 per 17789. Moltiplicando i numeri dati per 4 il divisore diviene 71156; sicchè dividendo 3501556 per 71156 si otterrà più speditamente il quoziente.

203. La moltiplicazione può esser ancora abbreviata col far che i prodotti parziali già ottenuti possano servire a trovar gli altri. Così sapendo che $4=2\times2=3+1$, se si è trovato il prodotto per 2, basta moltiplicar questo per 2 per aver il prodotto per 4, e se si è avuto il prodotto per 3 basta scriver questo un'altra volta e scrivervi sotto il moltiplicando per avere il prodotto per 4. Parimente, essendo $5=\frac{10}{2}=4+1=3+2$, si vede che il prodotto per 5 si può ottenere o aggiungendo un zero al moltiplicando e dividendo per 2, o aggiungendo i prodotti per 4 e per 1, o per 3 e per 2. Lo stesso si direbbe per gli altri numeri. Per es. se si deve moltiplicare 95843 per 85342, questa operazione non esigerà che la moltiplicazione per 2; siccome si vede qui sotto.

```
     95843
     85342
    ------
    191686
   383372      ( si moltiplica il precedente per 2 )
  191686       ( si scrive il prodotto per 2 già trovato e poi si scrive il moltiplicando.)
   95843
 383372        ( prodotto per 4 )
  95843        ( prodotto per 1 )
766744         ( si raddoppia la seconda linea )
----------
8179433306
```

Il saper ne' casi particolari valersi di queste ed altre abbreviazioni è pregio che si acquista più coll'esercizio che coi precetti.

CAPO X.

ALTRE MANIERE DI ESEGUIR LE OPERAZIONI SUI NUMERI.

204. Un calcolo avrà tanto maggior pregio, quanto minore è il numero delle operazioni elementari che si fanno per ottenerne il risultamento, e per conseguenza quanto minore è il numero delle cifre che si scrivono; e tanto più se a questa condizione si può congiunger l'altra di render più semplici le operazioni elementari che si fanno a mente. Si espongono perciò alcune altre maniere di eseguir le operazioni, tendenti a render più semplice il calcolo, o più facile l'esecuzione.

ART. I.

Addizione e sottrazione. Complemento aritmetico.

205. Se un numero intero, o decimale si sottrae dall'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del numero, o in altri termini se si sottrae da una diecina dell'ordine della prima cifra a sinistra, il resto si chiama il *complemento aritmetico* del numero dato. Ora il complemento aritmetico di un numero si ottiene facilmente scrivendo ciò che manca per arrivare a 9 in tutte le cifre e ciò che manca per arrivare a 10 nella prima cifra significativa a destra; così per ottenere il complemento aritmetico di 8754 si dirà: *da 8 a 9 è 1*, *da 7 a 9 è 2*, *da 5 a 9 è 4*, *da 4 a 10 è 6*, e si ha 1249. Or questa operazione è così semplice che basta un breve esercizio per imparare a scrivere il complemento aritmetico con la stessa facilità con cui si scriverebbe il numero dato.

Da ciò segue: 1° che un numero sommato col suo complemento aritmetico dà un'unità dell'ordine immediatamente superiore a quello della prima cifra a sinistra; 2° se un numero è il complemento di un altro, anche il secondo sarà il complemento del primo.

206. Se al numero 8 si dovesse aggiunger 5 e poi dalla somma toglier 3, è evidente per la natura stessa delle due operazioni, che si avrà lo stesso risultamento o che ad 8 si aggiunga prima 5 e poi si tolga 3, o che si tolga prima 3 da 5 e poi il resto si aggiunga a 8. Parimente se al numero 7834 si aggiungesse 10000 e poi si sottraesse 5247, si avrebbe lo stesso risultamento, che se si sottrae prima 5247 da 10000 e poi il resto si aggiunge a 7834. Ma quest'ultimo resto, cioè 10000 — 5247, è il complemento aritmetico di 5247; perciò se al numero 7834 si aggiunge il complemento aritmetico di 5247 si ha il resto della sottrazione di 5247 da 17834; per cui omettendo di scriver la diecina dell'ultima somma, si ha il resto della sot-

trazione di 5247 da 7834; siccome apparisce dall'esempio posto a lato. Quindi il complemento aritmetico serve a cambiar la sottrazione in addizione, il che si ottiene coll'aggiungere il complemento aritmetico del numero da sottrarsi e ometter la diecina dell'ultima somma parziale.

7834	7834
5247	4753
2587	2587

207. L'uso de' complementi riesce principalmente utile quando si hanno molti numeri, de' quali alcuni si debbono sommare, altri sottrarre; perciò che se in vece de' numeri da sottrarsi si scrivono i loro complementi, non si avrà che una semplice addizione da fare; ma però dall'ultima somma parziale fa d'uopo toglier tante diecine quanti sono i complementi introdotti. Per es. si debbano sommare i tre numeri 25,84, 34,7, 25,81; da cui si debbano sottrarre i due numeri 31,9, 17,48. Scrivendo i tre primi numeri e i complementi degli altri due, l'operazione si riduce a una addizione; e omettendo di scriver le due diecine dell'ultima somma si ha il risultamento 36,97, siccome si vede a lato.

25,84
34,7
25,81
68,1
82,52
36,97

Se la prima cifra a sinistra de' numeri dati non appartiene allo stesso ordine di unità, ossia se i numeri dati non contengono dal lato degl'interi lo stesso numero di cifre, si suppliranno le cifre mancanti con gli zeri posti a sinistra de' numeri di cui si debbono adoperare i complementi. Per es. dalla somma de' due numeri 5434, 61583 si debba sottrarre la somma de' numeri 14378, 6543, 791, 13. Questi tre ultimi numeri si potranno considerare come se fossero 06543, 00791, 00013, i cui complementi sono 93457, 99209, 99987; sicchè si dovrà far la somma de' numeri posti in margine e ometter le 4 diecine dell'ultima somma. Così si praticherà in ogni altro caso simile.

5434
61583
85622
93457
99209
99987
45292

208. Siccome per mezzo de' complementi si può cambiar la sottrazione in addizione, si potrà parimente far uso di essi per convertire l'addizione in sottrazione; basterà all'uopo sottrare da uno de' numeri dati il complemento dell'altro; in tal caso però converrà aggiungere una diecina al resto dato dall'ultima cifra a sinistra. Supposto che debbano sommarsi i due numeri 9,578 e 2,733; si potrà sottrarre 7,267 da 9,578, e aggiunger una diecina al resto dato dall'ultima cifra a sinistra, siccome si vede quì a lato.

9,578
7,267
12,311

Qualche volta per render l'operazione possibile, invece di aggiunger l'unità alla sinistra del resto, conviene aggiungerla al numero superiore. Così se dovessero sommarsi i due numeri 4528 e 2324, bisognerebbe sottrarre 7676 da 14528.

14528
7676
6852

Da ciò si conchiude che facendo uso del complemento, si può l'addizione cambiare in sottrazione, e viceversa.

209. Ecco intanto alcune osservazioni, di cui è facile rendersi ragione. 1° Se si hanno due numeri da sommarsi e si vuol far uso della

sottrazione, è indifferente sostituire il complemento aritmetico dell'uno o pur dell'altro de' due numeri dati. Gioverà preferir quello che rende la sottrazione possibile.

2° Se si hanno due numeri da sottrarsi, e si vuol far uso dell'addizione, convien prendere il complemento del numero inferiore per sommarlo col numero superiore. Se in vece si prendesse il complemento del numero superiore e si sommasse col numero inferiore si otterrebbe il complemento del resto che si cercava.

3° Se si hanno due numeri di cui l'uno deve sottrarsi dall'altro, si ha lo stesso resto sostituendo a' numeri dati i loro complementi aritmetici, e facendo la sottrazione in ordine contrario. Perciò $5743 - 2584 = 7416 - 4257 = 3159$.

A R T. II.

Dell' uso delle cifre negative.

210. I complementi adoperati nel modo indicato nell'art. prec. hanno con se l'inconveniente, che non conservando alcun segno della loro qualità, non indicano in modo preciso l'operazione da farsi. È vero che ne' numeri le operazioni si riconoscono spesso dal modo come son essi disposti; ma ciò non basta pe' complementi, imperocchè la diecina che per ciascuno deve togliersi o aggiungersi all'ultima cifra a sinistra, secondo che si tratta di addizione o di sottrazione, non è indicata e resta solo nella mente del calcolatore. Se dunque si volesse verificare il risultamento di un'operazione nella quale si è fatto uso de' complementi, questo si giudicherebbe necessariamente erroneo, non trovandosi alcun segno proprio ad indicare la qualità de' numeri adoperati e a supplire alle operazioni tacite che ne sono la conseguenza.

Per rimediare a questo inconveniente, e per far che ogni numero portasse seco l'indicazione delle operazioni da eseguirsi sopra ciascuna sua cifra, si può, lasciando senza segno le cifre che debbono sommarsi, mettere il segno — al di sopra di quelle da sottrarsi. In tal modo il complemento di 5247 si scriverebbe $\bar{1}4753$, e l'operazione riportata nel n° 206 si scriverebbe senza ambiguità nel modo che qui si vede.

$$\begin{array}{r} 7834 \\ \bar{1}4753 \\ \hline 2587 \end{array}$$

Questa maniera di scrivere i complementi rende inutile la precauzione di ridurre allo stesso numero di cifre quelli di cui debbono adoperarsi i complementi. Quindi l'operazione del n° 207 si riduce più semplicemente a quella posta a lato.

$$\begin{array}{r} 5434 \\ 61583 \\ \bar{1}85622 \\ \bar{1}3457 \\ \bar{1}209 \\ \bar{1}87 \\ \hline 45292 \end{array}$$

211. Siccome il segno — posto al di sopra di una cifra indica che questa dev'esser sottratta dalla somma delle altre, allorchè si adopera il complemento a fin di cambiar l'addizione in sottrazione, per far che nel numero stesso sieno indicate tutte le operazioni da eseguirsi sopra ciascuna cifra, è necessario apporre il segno — a

tutte le cifre da sottrarsi , e cancellarlo dalla prima unità.

Quindi il complemento di 2,733 essendo $\bar{1}7,267$, l'operazione del n° 208 sarà indicata nel modo che qui si vede.

$$\begin{array}{r} 9,578 \\ 1\bar{7},\bar{2}\bar{6}\bar{7} \\ \hline 12,311 \end{array}$$

Adottando questa maniera di scrivere , ogni cifra porterà con se il segno o l'indicazione dell'operazione da eseguirsi. Perciò in ognuna converrà distinguere il suo valore e il suo segno: Le cifre da sommarsi si dicono *positive* : quelle da sottrarsi , *negative*. Il segno + di cui dovrebbero esser affette le cifre positive si sopprime per semplicità ; per cui le cifre positive sono quelle senza segno.

212. Ogni numero si può considerare come la somma di due altri, di cui uno contenga una parte delle cifre del numero dato , e l'altro le cifre rimanenti. Per es. il numero 379425763 si può considerare come la somma de' due numeri 300420003 e 79005760. Or volendo cambiar l'addizione in sottrazione , conviene prendere il complemento del secondo numero e cambiare il segno delle cifre ; quel numero diviene allora $1\bar{2}\bar{1}01\bar{4}\bar{2}\bar{4}0$. Dovendosi questo numero riunire al numero 300420003 , è facile scoprire che siccome le cifre negative corrispondono al luogo degli zeri e gli zeri occupano precisamente il posto delle cifre che mancano ; basterà scrivere in luogo degli zeri le cifre corrispondenti dell'altro numero e aumentare di un'unità la cifra che precede la cifra negativa. Quindi la somma dei due numeri precedenti ovvero il numero dato 379425763 potrà scriversi $4\bar{2}\bar{1}43\bar{4}\bar{2}\bar{4}3$.

Volendo adottare il sistema di scrivere i numeri con cifre positive e negative , fa d'uopo tener presente che si cambia il segno delle cifre prendendone il complemento : e di più la cifra che precede l'ultima di quelle di cui si è preso il complemento deve aumentarsi di un' unità positiva o negativa secondo che le cifre di cui si è preso il complemento erano positive o negative.

213. Per non andar errati sull'uso di queste cifre, specialmente quando trattasi di riunir più numeri in un solo , conviene tener presente quanto segue :

1° Due cifre dello stesso segno si riuniscono sommandole e dando alla somma lo stesso segno che esse avevano ;

2° Due cifre di segno contrario si riuniscono , sottraendo la più piccola dalla più grande e dando al resto il segno della cifra di maggior valore ;

3° Due cifre eguali e di segno contrario , dando per resto zero , si distruggono.

Per convincersi della verità di questi precetti è da osservarsi che il resto di una sottrazione non si altera se da ciascuno de' numeri si toglie la stessa quantità. E siccome l'operazione ha luogo sopra ciascuna cifra in particolare , il resto che danno le cifre di ciascun ordine è lo stesso se da ciascuna si toglie la cifra più piccola ; il che permette di ridurre a zero una delle cifre. Per es. da 325238 si debba sottrarre 235671. Togliendo in ciascun ordine le unità della cifra più piccola , i due numeri si riducono a 100007 e 10440 e si vede immediatamente che senza far nessuna operazione , se-

guendo la notazione adottata, il resto è $1\bar{1}0\bar{4}\bar{4}7$. Or questo risultamento è identico a quello che si otterrebbe eseguendo sulle cifre de' numeri dati le regole esposte, siccome si vede a lato.

$$\begin{array}{r} 375238 \\ \bar{2}\bar{8}\bar{5}\bar{6}\bar{7}\bar{1} \\ \hline 1\bar{1}0\bar{4}\bar{4}7 \end{array}$$

214. L'uso de' segni nelle cifre, ossia la maniera di scrivere i numeri con cifre positive e negative può presentare un oggetto di utilità adottando il sistema di non adoperar cifre che oltrepassino il 5. In questa guisa si vede che il numero 5743987258 si deve scrivere $1\bar{4}\bar{3}4401\bar{3}\bar{3}4\bar{2}$. Anche in un numero scritto con cifre positive e negative, tutte le cifre che oltrepassano il 5 si possono ribassare al di sotto di questo numero prendendone il complemento e modificando la cifra che precede quelle di cui si prende il complemento, coll'aggiungervi un'unità positiva o negativa nel modo detto più sopra. Così il numero $5\bar{1}78\bar{3}57\bar{8}\bar{9}623$ scritto con cifre che non oltrepassino 5 diviene $50\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{4}412\bar{4}23$.

215. Scrivendo i numeri con cifre positive e negative, la moltiplicazione non esige che la conoscenza de' prodotti de' numeri semplici da 2 a 5, la quale può anche restringersi a quella del prodotto e del quoziente per 2. In effetti, essendo $3=2+1$, il prodotto per 3 si ottiene aggiungendo il moltiplicando al prodotto per 2; e finalmente essendo $5=\frac{10}{2}$, il prodotto per 5 si ottiene aggiungendo un zero al moltiplicando e dividendo per 2.

Rispetto ai segni di cui sono affette le diverse cifre è da osservarsi che siccome il prodotto è della stessa natura del moltiplicando, quando la cifra del moltiplicatore è positiva i segni del prodotto risultano come quelli del moltiplicando; ma se la cifra del moltiplicatore è negativa, le cifre corrispondenti de' prodotti verranno col segno contrario. In effetti suppongasi che il moltiplicatore sia $2\bar{2}$. Questo numero essendo eguale a $20-2$, è chiaro che dal prodotto per 20 bisogna sottrarre il prodotto per 2, la qual sottrazione si fa evidentemente scrivendo le cifre col segno contrario a quello che hanno nel moltiplicando.

Quindi, rispetto ai segni si avrà la regola: *che due cifre dello stesso segno danno un prodotto positivo, e due cifre di segno diverso danno un prodotto negativo.*

Ecco un esempio, in cui non si ha bisogno che di fare il prodotto per 2.

$$\begin{array}{r} 3\bar{1}2\bar{3}\bar{2}51\bar{4} \\ 1\bar{3}2 \\ \hline 6\bar{2}4\bar{6}\bar{3}02\bar{8} \\ \bar{6}2\bar{4}630\bar{2}8 \\ \bar{3}1\bar{2}32\bar{5}\bar{1}4 \\ 3\bar{1}2\bar{3}\bar{2}51\bar{4} \\ \hline 3\bar{9}0014\bar{7}\bar{6}4\bar{8} \end{array}$$

il qual risultamento si trasforma subito in 2100132432.

216. La divisione ordinaria si fa prendendo per cifra del quoziente il numero intero immediatamente minore del dividendo parziale diviso per il divisore, nel qual caso tutti i resti sono positivi; ma se in vece si prendesse per cifra del quoziente il numero intero immediatamente maggiore, il resto sarebbe negativo. Regolando la divisione in modo che ogni resto sia sempre minore della metà del divisore, ogni dividendo parziale non potrà contenere il divisore più di 5 volte, e quindi le cifre del quoziente non oltrepasseranno 5. L'operazione si conduce innanzi allo stesso modo, o che le cifre del dividendo sieno tutte positive, o che sieno in parte positive e in parte negative. Si tenga presente che siccome il dividendo è uguale al prodotto del divisore per il quoziente, ogni cifra del quoziente sarà positiva o negativa secondo che le cifre del dividendo parziale e del divisore hanno lo stesso segno o segno contrario. Quindi per non prendere equivoco o far tentativi inutili, tanto sul valore della cifra del quoziente, quanto sul segno, converrà forse meglio che il divisore sia composto di sole cifre positive, e che se un dividendo parziale è composto di cifre positive e negative sia trasformato se è necessario in un altro che contenga cifre tutte dello stesso segno.

Ecco due esempi.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 57324789 & 73 \\
 & \bar{7}\bar{3} & 1\bar{2}\bar{2}53\bar{3}1 \\
 & \bar{2}43 & \\
 & 146 & \\
 & \bar{1}89 & \\
\text{ovvero} & \bar{1}\bar{1}2 & \\
 & 146 & \\
 & \bar{3}\bar{8}\bar{4} & \\
 & \bar{3}\bar{6}\bar{5} & \\
 & 2\bar{1}7 & \\
 & \bar{2}\bar{1}\bar{9} & \\
 & \bar{2}\bar{2}8 & \\
 & 219 & \\
 & 79 & \\
 & \bar{7}\bar{3} & \\
 & 6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & 2\bar{3}\bar{5}21\bar{2}3\bar{4}2 & 582 \\
 & \bar{1}\bar{7}\bar{4}\bar{6} & 3\bar{2}4\bar{1}\bar{4}3 \\
 & \bar{9}\bar{4}1 & \\
 & 1164 & \\
 & 225\bar{2} & \\
 & \bar{2}\bar{3}\bar{2}\bar{8} & \\
 & \bar{1}203 & \\
 & 582 & \\
 & \bar{1}785 & \\
\text{ovvero} & \bar{2}\bar{1}\bar{5}\bar{4} & \\
 & 2328 & \\
 & 2\bar{3}42 & \\
 & \bar{1}\bar{7}\bar{4}\bar{6} & \\
 & \bar{4} &
\end{array}
$$

217. Questa pratica nella divisione riesce principalmente utile, quando si tratta di convertire in frazione decimale una frazione ordinaria; imperocchè non potendo il resto sorpassare la metà del divisore, il

numero de' resti diversi in valore assoluto si riduce alla metà; e appena comparisce un resto negativo, si hanno le stesse cifre nel quoziente col segno contrario. Quindi il periodo si scoprirà più presto. Così per ridurre $\frac{1}{7}$ in frazione decimale si farà l'operazione qui posta:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \cline{2-2} \bar{7} & 0,143\bar{1}\bar{4}\bar{3}\ldots \\ \hline \bar{3}\bar{0} & \\ \bar{2}\bar{8} & \\ \hline \bar{2}0 & \\ \bar{2}\bar{1} & \\ \hline \bar{1}0 & \end{array} \quad \text{e perciò } \frac{1}{7} = 0,143\,\bar{1}\bar{4}\bar{3}\,143\ldots$$

Similmente si troverebbe

$$\frac{1}{13} = 0,1\ \bar{2}\bar{3}\bar{1}\ 23\ 1\bar{2}\bar{3}\ \bar{1}23\ldots.$$

218. Lo stesso avviene quando si cercano i resti della divisione dei numeri

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000, \ldots$$

per un numero qualunque, di cui si è parlato al n° 75; imperocchè coi resti negativi si dà luogo alla metà delle operazioni. Per ciò la serie de' resti de' numeri precedenti divisi per 7 sarà

$$1,\ 2,\ 3,\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3}\ldots.$$

Quindi l'operazione fatta al n° 75 per vedere se il numero 783582396 è divisibile per 7 riesce molto più semplice coi resti negativi; siccome si vede qui appresso

$$\begin{array}{rr} \multicolumn{2}{c}{783582396} \\ \multicolumn{2}{c}{231\bar{2}\bar{3}\bar{1}231} \\ \hline 2 & 6 \\ 24 & 27 \\ 10 & 6 \\ \cline{1-1} 36 & 3 \\ & 24 \\ & 14 \\ \cline{2-2} & 80 \\ & 36 \\ \cline{2-2} & 44 \\ & 2 \end{array}$$

219. Poichè i resti della divisione di 1, 10, 100, 1000, ec. per 11 sono 1 e — 1, ne risulta immediatamente che per avere il resto della divisione per 11 di un numero qualunque, bisogna dalla somma delle cifre di posto impari sottrarre la somma delle cifre di posto pari, considerando come prima cifra quella a destra: proprietà già dimostrata al n° 77.

ART. III.

Moltiplicazione e divisione ordinata.

220. Nella moltiplicazione, allorchè il moltiplicatore è di una sola cifra, ciascuna cifra del prodotto risulta in generale dalla somma di tre parti; cioè, dalle unità del prodotto del moltiplicatore per la corrispondente cifra del moltiplicando, dalle diecine del prodotto precedente e dalle diecine della somma che ha data la cifra precedente. Per es. dovendosi moltiplicare 375834 per 7, la quinta cifra del prodotto sarà composta dalle unità del prodotto 7×7 che è 9, dalle diecine del prodotto 5×7 che è 3, e dalle diecine che si riportano dalla somma che ha data la cifra precedente, che è 1. E siccome queste somme si fanno facilmente a memoria, si possono scrivere immediatamente tutte le cifre del prodotto.

Allorchè il moltiplicatore è composto di più cifre, la regola prescrive di trovar prima i prodotti del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, e poi sommare questi prodotti parziali, per ottenere il prodotto totale. Ma se, in voce di ottener le cifre che debbono comporre le linee orizzontali, si trovassero quelle che debbono comporre le colonne verticali, se ne farebbe a mente la somma, e si potrebbero scrivere immediatamente le cifre del prodotto, come quando il moltiplicatore è di una sola cifra.

Ma anche in questo caso ciascuna cifra del prodotto si compone di tre parti, cioè: della somma delle unità de' prodotti dell'ordine di essa cifra, della somma delle diecine de' prodotti dell'ordine precedente, e del riporto che risulta dalla somma delle cifre che compongono la colonna precedente. Quindi tutto riducesi a determinare di che ordine è il prodotto di una cifra qualunque del moltiplicatore per una cifra qualunque del moltiplicando.

Ora è evidente che l'ordine del prodotto di una cifra del moltiplicatore per una del moltiplicando è espresso dalla somma delle unità che indicano gli ordini cui appartengono le due cifre prese, diminuita di uno. Così per es. le unità del prodotto della 2ª cifra del moltiplicatore per la 4ª del moltiplicando sono del quinto ordine e perciò appartengono alla quinta colonna; quelle della 4ª del moltiplicatore per la 3ª del moltiplicando appartengono alla 6ª colonna, e così di seguito. Suppongasi adunque che si debba fare il prodotto di 365847 per 4378. La prima cifra del prodotto sarà data dalle unità del prodotto 7×8, e sarà 6. La seconda cifra sarà data dalla somma, delle diecine del prodotto precedente cioè 5, e delle unità de' due prodotti della 1ª cifra dell'uno per la 2ª delle altre e viceversa, cioè de' due prodotti 4×8 e 7×7, che sono 2 e 9

ed essendo $2+9+5=16$, la seconda cifra sarà 6. La terza cifra del prodotto risulta dall' 1 che si riporta dalla somma precedente, dalle diecine de' due prodotti precedenti che sono 3 e 4, e dalle unità de' tre prodotti che risultano moltiplicando ciascuna delle prime tre cifre a destra del moltiplicando per le tre cifre del moltiplicatore prese in ordine inverso, cioè dalle unità de' tre prodotti 8×8, 4×7, 7×3 che sono 4, 8, 1; e quindi la terza cifra risulterà dalle unità della somma $1+3+4+4+8+1=21$, e sarà perciò 1. La quarta si ottiene sommando il 2 che si riporta dalla somma precedente, le diecine de' tre prodotti precedenti, e le unità de' quattro prodotti della 1ª, 2ª, 3ª, e 4ª cifra (a destra) del moltiplicando rispettivamente per la 4ª, 3ª, 2ª, e 1ª cifra del moltiplicatore. E così di seguito.

221. Si rende più facile l'operazione scrivendo il moltiplicatore in ordine inverso e in un pezzo di carta separato. Con questo ripiego il moltiplicatore, reso mobile, si andrà successivamente applicando sotto le cifre del moltiplicando, situando la prima cifra a sinistra di esso moltiplicatore invertito sotto la prima cifra a destra del moltiplicando, e poi facendolo avanzar di un posto per ogni volta, e moltiplicando sempre le cifre che si corrispondono verticalmente. Riprendendo l'operazione di sopra, e scrivendo 8734 in vece del moltiplicatore dato, si situerà da principio nel modo che si vede in A. La prima cifra del prodotto sarà quella delle unità del prodotto delle cifre corrispondenti alla stessa verticale, cioè sarà 6. Si prendono poi le diecine di questo prodotto cioè 5, si fa camminare il moltiplicatore come si vede in B, e al 5 si uniscono le unità date da' prodotti delle cifre che si corrispondono verticalmente. Si dirà dunque 5 più 9 più 2 fanno 16, e si scrive il 6. Poi 1 che si riporta più 4 più 3, che sono le diecine de' due prodotti precedenti, fanno 8; si tiene a memoria l' 8 e si trasporta il moltiplicatore come si vede in C. In seguito si dirà: 8 che si riporta più 1 più 8 più 4, che sono le unità de' prodotti delle cifre che si corrispondono, fanno 21, e si scrive l' 1 per terza cifra. Poi si dirà: 2 che si riporta dalla somma precedente, più 2 più 2 più 6 che sono le diecine de' prodotti precedenti, fanno 12; si tiene a memoria il 12, e si passa il moltiplicatore più avanti, come si vede in D. In seguito si dirà: 12 che si riporta, più $8+2+6+0$, che sono le unità de' nuovi prodotti, fanno 28, si scrive l' 8 per 4ª cifra e si riporta il 2. Poi 2 che si riporta più $2+1+5+4$, che sono le diecine de' prodotti precedenti, fanno 14; passato il moltiplicatore più avanti, come si vede in E, si dirà: 14 che si ri-

```
A  365847
     8734
       56

B  365847
    8734
      81

C  365847
   8734
    113

D  365847
  8734
   136

E  365847
 8734
  123

F  365847
8734
 113

G   365847
 8734
   59

H    365847
 8734
   33

I     365847
 8734
   12
```

porta, più 6+4+5+8, che sono le unità de' prodotti delle cifre che si corrispondono verticalmente, fanno 36, si scrive 6 per 5a cifra. In seguito: 3 che si riporta, più 1+2+3+4, che sono le diecine de' prodotti precedenti, fanno 13; si passa il moltiplicatore come si vede in E, e si dirà: 13+2+5+2+1 fanno 26; e si scrive il 6. Poi 2+3+1+4+2 fanno 12; passato il moltiplicatore più avanti, come si vede in G, si dirà: 12+0+8+1=21, e si avrà per settima cifra 1. Poscia 2+2+1+2=7; spinto il moltiplicatore più innanzi, come si vede in H, si dirà: 7 che si riporta +4+9=20, per cui l'ottava cifra sarà 0, e si riporta 2. In seguito 2+2=4, e fatto camminare di un altro posto il moltiplicatore, come si vede in I, si dirà: 4+12, prodotto di 4 per 3, fanno 16, che si scrive per intero, non essendovi più cifre ne' fattori. Il prodotto cercato sarà dunque 1601678166.

Questa maniera di eseguir la moltiplicazione può a prima vista sembrar più difficile dell'ordinaria. Ma la difficoltà svanisce interamente, scrivendo il moltiplicatore in ordine inverso e rendendolo mobile, giacchè basta il più breve esercizio per acquistar l'abitudine di chiamare e sommare le unità o le diecine de' prodotti de' numeri semplici, guardando solamente i numeri. Per es. ne' numeri posti a margine si dirà subito: 8+1+5 fanno 14, 1 che si riporta +4+2+1 fanno 8; sicchè la somma de' prodotti delle cifre che si corrispondono verticalmente è 84.

```
376
538
---
 84
```

222. Per non istancar molto la memoria, e per aver anche l'agio di verificar l'operazione, si potrebbero scrivere i prodotti dello stesso ordine, corrispondenti ad ogni posizione del moltiplicatore, avvertendo però di scrivere le unità de' detti prodotti in una linea, le diecine in una linea superiore, e le centinaja in un'altra linea superiore; e siccome le unità si possono scrivere appena ottenute, non vi sarà bisogno di fare riporto. L'operazione disposta nel modo indicato è quella che si vede quì appresso.

```
    365847
      8734
----------
   1111
 135123185
  239336316
----------
 1601678166
```

223. Il principio su cui riposa l'esposto metodo di moltiplicazione serve di base ad un metodo elegantissimo di divisione, proposto da Fourier sotto il nome di *divisione ordinata*.

Il qual metodo consiste nell'adoperare le cifre del divisore a misura che si rendono necessarie per ottenere la cifra esatta nel quoziente; ma siccome i resti non vengono esatti, conviene correggere l'errore che in essi proviene dalle cifre trascurate nel divisore. Per isvilupparlo quanto conviene a renderne chiaro il principio e facile l'esecuzione, si ragionerà sopra un esempio particolare.

Si debba dividere 357943297372 per 7546728375. Ecco l'operazione con l'indicazione della correzione fatta ne' resti.

```
1° divid.  35794'3'2'9'7'3'72   |  7546'7'2'8'3'75
            5634'               |-----------------
              24 = 4.6          |  474302 . . . .
2° divid.   5610
             3323'
                70=4.7+7.6
3° divid.    3253
              2372'
                81 =4.2+7.7+4.6
4° divid.     2291
                299'
                 90 =4.9+7.2+4.7+3.6
5° divid.        209
                 2037'
                  104=4.3.+7.8+4.2+3.7+0.6
6° divid.         1933
                   423
```

Per non servirsi di un divisore di molte cifre si prende un divisore formato dalle prime due cifre, o pure dalle prime tre, o dalle prime quattro a sinistra. Suppongasi che si prenda per divisore 754. Il dividendo corrispondente a questo divisore sarà 3579. Si faccia la divisione all'ordinario, e si avrà per prima cifra del quoziente 4 e per resto 563. Operando a tal modo si sono tolti dal dividendo i prodotti della prima cifra 4 del quoziente per le sole prime tre cifre del divisore. Per l'esattezza del risultamento converrebbe togliere i prodotti per 4 delle cifre che seguono 754 ; ma siccome questi prodotti sono rispettivamente dello stess'ordine delle cifre che seguono il primo dividendo 3579 , si potrà andarli togliendo a misura che si calano le cifre del dividendo. Calata la prima cifra 4 , si ha il secondo dividendo 5634 che bisogna correggere sottraendone il prodotto di 4 per la prima delle cifre che seguono il divisore segnato , il qual prodotto è 24. Eseguita la correzione , si ha 5610 per 2° dividendo parziale. Si faccia al solito la divisione , e si ha per seconda cifra del quoziente 7 , e per resto 332. Su questo resto ragionando come precedentemente , si vede che bisogna dal dividendo sottrarre tutti i prodotti di 7 per le cifre che seguono il divisore segnato , i quali prodotti sono rispettivamente dell'ordine stesso delle rimanenti cifre del dividendo. A misura dunque che queste cifre sono chiamate , bisognerà andarne togliendo tutti i prodotti dello stesso ordine di esse , dipendenti dalle cifre trascurate nel divisore. Calando la cifra 3 si ha 3323 : i prodotti dello stess'ordine che bisogna sottrarne sono quelli che risultano dalla 1a cifra del quoziente per la seconda di quelle che seguono

il divisore segnato, e dalla seconda del quoziente per la prima delle dette cifre. La somma di questi prodotti è 70. Sottratto questo numero da 3323, si ha 3253 per terzo dividendo parziale corretto. Dividendo 3253 per 754, si ha per terza cifra del quoziente 4 e per resto 237. Calando la cifra seguente, si ha l'altro dividendo 2372 che bisogna correggere sottraendone la somma de' prodotti della 1a, 2a e 3a cifra di quelle che sono a destra del divisore segnato rispettivamente per la 3a, 2a e 1a cifra del quoziente. Questa somma de' prodotti è 81, la quale sottratta da 2372 dà per resto 2291, che è il quarto dividendo parziale corretto. E così si continuerà.

Le somme de' prodotti che debbono sottrarsi da ciascun dividendo parziale si ottengono scrivendo in ordine inverso e in un foglio separato le cifre del quoziente, poi presentandole successivamente alle cifre che sono a destra del divisore segnato, si tratterà di far la somma delle unità e delle diecine de' prodotti delle cifre che si corrispondono verticalmente, la quale somma si ottiene senza che vi sia bisogno di scrivere i prodotti (n° prec.).

L'operazione così eseguita riesce facilissima. Questo metodo differisce da quello esposto al n° 196. Giacchè in quel caso è determinato anticipatamente il numero delle cifre che si vogliono nel quoziente, e si vanno rifiutando le cifre a destra del divisore, a misura che queste si rendono inutili per le cifre che si cercano nel quoziente; in guisa però che l'operazione non si potrebbe prolungare al di là di quello che si era stabilito nell'incominciarla. In questo si procede in ordine inverso; si fa uso di un divisore assai semplice prendendo per formarlo le sole prime due o tre cifre, e si chiamano le altre cifre del divisore a misura che si rendono nenessarie per l'esattezza delle cifre del quoziente. Con ciò si evita ogni calcolo inutile, e si può prolungar l'operazione finchè si vuole: vantaggio di grandissimo conto. Il metodo qui esposto riesce poi sommamente utile quando il divisore ha moltissime cifre, e non si cercano che poche cifre nel quoziente.

224. Per la pratica di questa divisione sono necessarie alcune osservazioni.

1° Siccome ogni resto, unito alla cifra che si cala, dev'esser corretto per formare un dividendo parziale, la cifra scritta nel quoziente sarà esatta, ogni volta che la correzione è possibile.

2° La correzione è sempre possibile, quando il resto è maggiore o almeno eguale alla somma delle cifre già scritte nel quoziente e considerate come se fossero unità; giacchè il resto seguito dall'altra cifra si rende maggiore del decuplo di detta somma, e le diverse cifre del quoziente sono moltiplicate per numeri minori di 10. Gioverà dunque per ogni resto assicurarsi di questa condizione; se essa non ha luogo, la cifra scritta nel quoziente è incerta.

3° Quando la correzione non si può fare, la cifra scritta al quoziente è troppo grande, e bisogna diminuirla di un'unità. Se dopo diminuita la cifra del quoziente, e ripetuta l'operazione, si ha un

altro resto, su cui nemmeno può eseguirsi la correzione, si diminuirà la cifra del quoziente di un'altra unità, e ciò si ripeterà finchè il resto divenga così grande, che unito alla cifra che segue dia un numero maggiore della somma de' prodotti che se ne debbono sottrarre.

4° Se si è preso per divisore segnato un numero troppo piccolo di cifre, avverrà presto che la correzione non potrà farsi; giacchè il resto è sempre minore del divisore, e il numero de' prodotti da sottrarsi da ogni dividendo parziale va in generale crescendo a misura che si spinge più innanzi l'operazione, fino a che non sieno esaurite tutte le cifre rimaste a destra del divisore. In questo caso non si troverà la vera cifra del quoziente che dopo un numero di tentativi più o meno grande. Siccome l'impossibilità della correzione dipende dall'esser troppo piccolo il divisore adottato, si evita questa ripetizione di calcolo prendendo un divisore con qualche cifra di più.

5° Volendo prender un divisore con una cifra di più, non è necessario incominciar da capo l'operazione. Ma quando si ha un dividendo parziale corretto, in vece di trovar l'altra cifra del quoziente, si calerà un'altra cifra del dividendo, il che darà un nuovo dividendo parziale; nel tempo stesso si aggregherà un'altra cifra al primo divisore scelto, e si avrà un nuovo divisore segnato.

Si farà poi sul nuovo dividendo parziale la consueta correzione, paragonando le cifre del quoziente con un egual numero di quelle rimaste a destra del nuovo divisore segnato.

6° Si può nel corso dell'operazione diminuire o aumentare a piacere il numero delle cifre che si sono segnate per formare il divisore segnato; giacchè per diminuirlo si eseguirà la divisione sul resto senza calar una nuova cifra; e per aumentarlo, si calerà una seconda cifra dopo fatta la prima correzione, e per ogni cifra che si cala si farà una nuova correzione.

7° Se si volesse il resto di una divisione eseguita con questo metodo, bisognerà calar tante cifre dal dividendo (una per volta), quante ne sono necessarie per prender il divisore con tutte le cifre.

8° È inutile in questa operazione tener conto della grandezza dell'unità cui si riferisce il quoziente, giacchè nella divisione si conosce, indipendentemente dall'operazione, di che ordine è la prima cifra del quoziente.

225. Ecco due esempi, sui quali studiando si può acquistar compiuta conoscenza del metodo.

```
                                2734'9'6'5',8'9'0'0'. . | 763'4'2'9',5'8'7'3'2'3'4'37
                                 454'                   |----------------------------
                                   9(=3.3)              |3,58 2 4 7 3 0 0 78....
                                ----
2. divid. parz. cor.            445
                                  659'
                                   27(=3.4+5.3)
                                  ---
3. divid. parz. cor...            632
                                   246'
                                     50(=3.2+5.4+8.3)
                                   ---
4. divid. parz. cor...             196
                                     445'
                                       75(=3.9+5.2+8.4+2.3)
                                     ---
5. divid. parz. cor...               370
                                       668'
                                         96(=3.5+5.9+8.2+2.4+4.3)
                                       ---
6. divid. parz. cor...                 572
                                         409'
                                         162(=3.8+5.5+8.9+2.2.+4.4.+7.3)
                                         ---
7. divid. parz. cor...                   247
                                          190'(19<3+5+8+2+4+7+3: la cifra 3 è
                                               incerta )
                                          164(=3.7+5.8+3.5+2.9+ec.)
                                          ---
Nuovo divid.parziale                      260' ( La correzione può farsi; per cui la cifra 3
                                                del quoziente è esatta. Ma il divisore se-
                                                gnato essendo divenuto troppo piccolo per
                                                poter proseguire l'operazione, si cala un'
                                                altra cifra dal dividendo, e si prende 763
                                                per nuovo divisore segnato )
                                          180 (=3.3+5.7+8.8+2.5+...+3.4)
                                          ---
8. divid. parz. cor...                     80
                                           800'
                                           182(=3.2+5.3+......+3.2+0.4)
                                           ---
9. divid. parz. cor...                     618
                                           6180'
                                            157(=3.5+5.2+.....+3.9+0.2+0.4)
                                           ----
10. divid. parz. cor.                      6023
                                            6820'
                                             186(=3.4+5.5+...+0.2+7.4)
                                            ----
11. divid. parz. cor..                      6634
                                             530
```

538′,0′0′0′... | 9,2′5′4′3′2′9′6

88′ | 5 8,1359

10 | 4

78

60′(6<5+8 ; per cui la cifra 8 è incerta)

41

190′ (la cifra 8 è esatta ; però si cali un' altra cifra , e si prenda 92 per nuovo divisore segnato)

60

130

380′

52

328

520′

53

467

70′ (7<5+7+1+3+5 ; per cui la cifra 5 è incerta)

101 (la correzione non può farsi ; perciò la cifra 5 è troppo grande)

990′ (si è scritto 4 invece di 5 al quoziente , e si è avuto per nuovo resto 99)

96

8940′ (si cala un'altra cifra , e si prende 925 per nuovo divisore segnato)

129

8811

4860′ (Arrivati a questo punto, se si volesse il resto, si calerebbero tante cifre dal dividendo finchè si prende per divisore il divisore intero , non dimenticando di fare , per ogni cifra che si cala , la correzione.)

111

47490′

68

474220′

72

4741480′

105

47413750′

54

47413696′ Resto

226. La divisione ordinata riesce utilissima , quando o il dividendo o il divisore o amendue non sono esatti ma approssimati ; giacchè adoperandosi le cifre del dividendo e del divisore a misura che bisognano , si può facilmente giudicare quando le cifre che mancano possono cominciare a influir su le cifre del quoziente.

ART. IV.

Frazioni continue.

227. Allorchè si ha una frazione espressa in termini assai grandi ed irriducibile, è necessario in molti casi aver delle frazioni approssimate alla data ed espresse in termini più semplici. Si potrebbe convertir la frazione proposta in decimali, e terminando l'operazione alla prima, seconda, terza, ec. decimale, si avrebberro frazioni sempre più prossime alla vera. Ma queste frazioni decimali non sono le più semplici fra tutte quelle che per un dato grado di approssimazione si avvicinano alla proposta. Ecco come si deve procedere in questo caso.

Si abbia per es. la frazione $\frac{537}{2935}$. Per formarsi un'idea distinta del valore rappresentato da questa espressione, si dividano i suoi termini per 537; e siccome $\frac{2935}{537}=5+\frac{250}{537}$, si avrà $\frac{537}{2935}=\cfrac{1}{5+\frac{250}{537}}$.

Con questa sola operazione si conosce già che la frazione proposta è compresa fra $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$. Trascurando il resto 250, si ha la frazione $\frac{1}{5}$ un poco più grande della proposta.

Volendo tener conto anche del resto 250, si opererà sulla frazione $\frac{250}{537}$, come sulla prima frazione, cioè si divideranno i suoi termini per 250 e si avrà $\frac{537}{2935}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\frac{37}{250}}}$. Trascurando il resto 37, la frazione proposta sarà prossimamente uguale a $\cfrac{1}{5+\frac{1}{2}}$, cioè eguale a $\frac{2}{11}$. La frazione $\frac{2}{11}$ sarà un poco più piccola della data, giacchè trascurando la frazione $\frac{37}{250}$ si ha $\frac{1}{2}>\cfrac{1}{2+\frac{37}{250}}$; sicchè aggiungendo a 5 una quantità troppo grande, si ha il denominatore $5+\frac{1}{2}$ maggiore del giusto, e la frazione $\cfrac{1}{5+\frac{1}{2}}$ sarà troppo piccola.

Volendo ancora tener conto del resto 37, si opererà sulla frazio-

ne $\frac{37}{250}$ come sulle precedenti; e si avrà $\frac{537}{2935}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{28}{37}}}}$

Trascurando il resto 28, si ha $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6}}}=\frac{13}{71}$, frazione maggiore della proposta; come è facile assicurarsi. Così proseguendo, si ottengono le espressioni

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1}}}} \qquad \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}} \qquad \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}}}}}$$

delle quali l'ultima è uguale alla frazione proposta, e le altre sono alternativamente maggiori e minori di essa. Queste espressioni si dicono *frazioni continue.*

228. È facile rimontare da una frazione continua alla frazione ordinaria equivalente. Prendendo la penultima di quelle trovate, si ha $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, $\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{3}{4}$, $6+\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$, $\frac{1}{\left(\frac{27}{4}\right)}=\frac{4}{27}$, $2+\frac{4}{27}=\frac{58}{27}$,

$\frac{1}{\left(\frac{58}{27}\right)}=\frac{27}{58}$, $5+\frac{27}{58}=\frac{317}{58}$, $\frac{1}{\left(\frac{317}{58}\right)}=\frac{58}{317}$. Operando in tal modo su tutte

le altre, si hanno le frazioni

$$\frac{1}{5},\ \frac{2}{11},\ \frac{13}{71},\ \frac{15}{82},\ \frac{58}{317},\ \frac{537}{2935},$$

delle quali la prima la terza e la quinta sono più grandi, le altre più piccole della frazione $\frac{537}{2935}$. Queste frazioni si chiamano *ridotte*, e godono della proprietà che ciascuna di esse si approssima alla frazione data più di qualunque altra espressa in termini più semplici, siccome si dimostra in Algebra.

Sarà facile ravvisare che per ridurre una frazione a frazione continua bisogna far sopra i suoi termini la stessa operazione che si

fa per trovare il massimo c. divisore. Si spinge l'operazione finchè si abbia un resto eguale a zero ; i quozienti , presi secondo l'ordine con cui si sono ottenuti, formano i denominatori successivi della frazione continua.

229. Supponendo l'operazione terminata al primo resto, o al secondo, o al terzo, ec., si possono trovar le ridotte colla regola assegnata al n° 82. Sia per es. la frazione $\frac{734}{6251}$. Ecco il quadro dell'operazione da eseguirsi.

6251	734	379	355	24	19	5	4	1
	8	1	1	14	1	3	1	4
1303	153	79	74	5	4	1	1	
1039	122	63	59	4	3	1		
264	31	16	15	1	1			
247	29	45	14	1				
17	2	1	1					
9	1	1						
8	1							

I numeri contenuti nelle due prime colonne a sinistra sono i termini delle ridotte successive, le quali perciò saranno

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{17},\ \frac{29}{247},\ \frac{31}{264},\ \frac{122}{1039},\ \frac{153}{1303},$$

tutte convergenti, ora in più ora in meno, verso la frazione $\frac{734}{6251}$.

Quindi se i termini della frazione contengono qualche divisore comune, la frazione continua che ne risulta dà immediatamente la frazione ridotta alla sua più semplice espressione.

230. L'esposto metodo può applicarsi ancora ad una frazione decimale non esatta, ad oggetto di trovare delle frazioni approssimate espresse in termini più semplici. Ma non tutte le ridotte che se ne ricavano possono esser egualmente ritenute come frazioni convergenti verso la quantità data. Infatti suppongasi che questa sia approssimata per difetto; aumentando l'ultima cifra di un'unità, si hanno due limiti fra i quali dev'esser compresa la quantità data. Per non uscir da questi limiti, bisogna operare su tutte due le frazioni, e ritenere i soli quozienti comuni. È forse inutile avvertire che se la frazione data fosse approssimata per eccesso, l'altro limite si ha diminuendo l'ultima cifra di un'unità.

Sia per es. il numero frazionario 3,14159265.... minore del vero. È chiaro che la quantità data, quali si sieno le cifre che seguono l'ultima, sarà compresa fra 3,14159265 e 3,14159266. Riducendo in

frazione continua la frazione $\frac{314159265}{100000000}$, si hanno i quozienti

$$3\,,\ 7\,,\ 15\,,\ 1\,,\ 288, \ldots$$

e riducendo similmente l'altra $\frac{314159266}{100000000}$, si hanno i quozienti

$$3\,,\ 7\,,\ 15\,,\ 1\,,\ 299, \ldots$$

Da ciò si vede che i soli primi quattro quozienti sono esatti; vale a dire che le cifre trascurate nella frazione decimale data non influiscono sulle prime quattro ridotte. Si ha dunque la frazione continua

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\text{ec.}}}}$$

che dà le quattro ridotte esatte

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}\ (^*).$$

(*) La quantità 3,14159265 . . . rappresenta il rapporto della circonferenza al diametro. La frazione $\frac{22}{7}$ è quella assegnata da Archimede. La quarta, cioè $\frac{355}{113}$ data da Mezio, merita esser avvertita con particolarità, tanto perchè con termini assai semplici esprime molto prossimamente il suddetto rapporto da cui differisce per meno di $\frac{3}{10000000}$, quanto perchè la disposizione delle sue cifre presenta una particolarità che la fa ritenere facilmente a memoria. Di fatto scritti i primi tre numeri impari ognuno due volte, si ha 113355, di cui le prime tre cifre appartengono al denominatore, le altre tre al numeratore della menzionata frazione.

CAPO XI.

DELLE MISURE.

231. Valutare una cosa significa determinarne il *valore*. Due oggetti hanno il medesimo valore, quando tutti gli uomini consentono a permutare l'uno nell'altro. Se due canne di panno si trovano a cambiare con 10 tomoli di grano, queste due cose avranno lo stesso valore.

Per taluni oggetti il valore è individuale e non cresce che col numero. Per es. se un cavallo costa 40 ducati, due cavalli costeranno 80, ec. Per altri oggetti il valore dipende da un elemento che bisogna misurare.

Misurare una cosa vuol dire determinare quante unità sono necessarie per comporla. L'unità dovendo essere una grandezza della medesima specie di quella da misurarsi, vi dovranno esser tante specie di unità per quante sono le cose che si valutano a *misura*. Gli elementi misurabili che possono entrare nella valutazione di una cosa sono l'estensione, il peso ed il tempo; vi saranno perciò tre specie di misure: di estensione, di peso e di tempo. Ma l'estensione potendo esser di una, di due o di tre dimensioni, le relative unità di misura saranno pure di tre specie diverse. Può inoltre l'unità variare nella grandezza e nelle suddivisioni relativamente all'uso cui le misure son destinate.

Ecco il quadro contenente le diverse classi di misure delle quali si può aver bisogno, insieme colle distinzioni cui l'uso o il comodo della società può dar luogo intorno alla grandezza dell'unità e al modo di dividerla.

Oltre queste misure vi è la moneta, che serve a misurare il valore relativo di due oggetti qualsivogliano paragonati nello stesso luogo

e alla stessa epoca. Perciò se in un paese un cavallo costa 50 scudi, e un bue 20, si dirà che il valor del cavallo sta a quello del bue come 50: 20 o come 5: 2; sicchè 5 buoi e 2 cavalli avranno lo stesso valore.

232. Le misure di superficie e di volume, siccome si sa dalla Geometria, dipendono dall'unità lineare. La loro determinazione è una conseguenza delle proprietà di cui gode la figura che comprende l'area o il volume da misurarsi.

Quanto alle aree, il calcolo che ne dà la misura riducesi sempre a formare il prodotto di due fattori che rappresentando le misure di due linee si possono riguardare come la base e l'altezza di un rettangolo. Si sa che una linea si esprime in numeri paragonandola all'unità lineare, cioè facendo sulla linea data e su quella che si prende per unità l'operazione della massima comune misura. Or quando le linee sono così espresse, il loro prodotto rappresenta in unità superficiali la misura dell'area data, e questa unità è il quadrato fatto sull'unità lineare.

Similmente quando trattasi di volume, la sua determinazione dipende dal prodotto di tre fattori che si possono considerare come i tre lati o le tre dimensioni di un parallelepido rettangolo. Or quando i lati sono espressi in numeri, il prodotto stesso esprime in unità cubiche la misura del parallelepido, e l'unità cubica è il cubo che ha per lato l'unità.

Queste proposizioni si dimostrano in Geometria. La seconda e la terza potenza di un numero (n° 145), per la proprietà che hanno di rappresentare rispettivamente la misura del quadrato e del cubo, si chiamano il quadrato e il cubo di quel numero. Le misure di superficie e di volume per la medesima ragione si chiamano anche *quadrate* e *cubiche*.

233. Le misure di estensione e di peso entrando in quasi tutte le relazioni commerciali, in ciascun Paese si trova stabilita dalle leggi amministrative la grandezza dell'unità ad esse relativa e il modo come dividerla; nè la permuta degli oggetti di egual valore avrebbe il carattere di sicurezza necessario, se l'elemento valutabile non si misurasse per mezzo di campioni guarentiti dal Governo.

Affinchè queste misure formino un *sistema*, converrebbe, che le suddivisioni e i multiplici dell'unità procedessero con la medesima legge e fossero sempre uniformi; che tutte dipendessero dall'unità lineare con rapporti espressi in numeri semplici e facili a ritenersi; e che l'unità lineare dipendesse pure da qualche misura naturale invariabile. La prima condizione darebbe uniformità e semplicità al calcolo. La seconda, oltre al metter tutti gli uomini nella possibilità di comprendere il legame che passa fra le misure e di valersene al bisogno, dispenserebbe dal bisogno di conservare per ciascuna misura il campione dell'unità. La terza condizione, dando alle misure il carattere d'invariabilità, renderebbe possibile il rettificarle, qualora pel grandissimo numero delle copie che se ne fanno si

venissero ad alterare, e offrirebbe il mezzo di rinvenirle in ogni tempo qualora per volger di secoli si perdessero i campioni. Si conseguirebbe il massimo vantaggio, se le misure seguissero la divisione decimale, perchè allora il calcolo da farsi per la valutazione degli oggetti rientrerebbe in quello degl'interi.

Ma disgraziatamente le misure in molti Paesi mancano di tutte o quasi tutte queste condizioni; e variano nella grandezza e nelle suddivisioni non solo da Regno a Regno, ma anche da paese a paese di un medesimo Regno. Ed il più sorprendente è che le superficie e i volumi la cui determinazione si ottiene per mezzo dell'unità lineare, spesso si rapportano ad un'unità diversa da quella che ha per lato l'unità lineare. Anzi le misure di capacità hanno ordinariamente per unità una misura che, non avendo nessuna relazione coll'unità lineare, non può esser espressa esattamente per mezzo dell'unità cubica. Il qual gravissimo inconveniente, che spesso si accoppia a quello di dare a' vasi delle forme difficili a misurarsi, toglie il vantaggio di poter determinare il contenuto de' vasi col mezzo delle sue dimensioni e della sua forma, ricorrendosi all'altro di vuotarli o di riempirli, che nella vendita in grande de' liquidi riesce sempre imbarazzante, spesso impraticabile.

Queste condizioni tutte non solo contribuiscono ad allungare considerevolmente i calcoli, ma rendono difficili ed incerte le operazioni di commercio interno ed esterno; giacchè in tanta varietà di misure è ben difficile determinarne i rapporti esatti, allorchè queste non possono paragonarsi ad una misura comune invariabile.

234. Oltre le misure di estensione e di peso altre ve ne sono che potrebbero chiamarsi *convenzionali*, sulle quali il Governo non prende ingerenza, o perchè di loro natura non possono esser alterate e divenir mezzi di frode, o perchè non entrano direttamente ne' negozi, o perchè riguardano solamente una classe particolare di persone.

ART. I.

Esposizione delle principali misure in uso.

§ *I. Misure convenzionali.*

235. Il ritorno periodico de' fenomeni relativi al moto apparente del Sole intorno alla terra ha somministrato gli elementi per la misura del *tempo*.

Chiamasi *giorno* l'intervallo di tempo che passa da che il Sole abbandona un meridiano fino a che vi ritorna, o in altri termini l'intervallo da un mezzogiorno all'altro, o da una mezza notte alla seguente. Presso tutte le nazioni incivilite si divide attualmente in 24 ore, l'ora in 60 minuti, il minuto primo in 60 secondi. S'indica nel modo esposto al n° 113.

Nella vita civile si fa uso della parola *giorno* per esprimere il tempo della presenza della luce; sicchè può chiamarsi *giorno naturale* l'in-

tervallo in cui il Sole sta sull'orizzonte, e *notte* quello che passa dal tramontare al sorger del Sole. Il giorno naturale avendo una durata variabilissima non potrebbe servir di misura del tempo. Ma il giorno naturale e la notte formano costantemente 24 ore.

Il Sole cangia ogni giorno la sua posizione nel Cielo, e ritorna allo stesso sito in un intervallo di circa 365 giorni, che dicesi *anno*.

Cento anni formano un *secolo*. Questo periodo così lungo adoperato qualche volta per la misura del tempo non ha nessuna relazione co' fenomeni celesti; ma è un multiplo arbitrario dell'anno, come arbitraria è la divisione del giorno in 24 ore.

L'anno si divide in 12 mesi. L'ineguaglianza nella loro lunghezza non potrebbe far servir il mese per misura del tempo; a meno che non si considerassero tutt'i mesi composti di 30 giorni, siccome si ha costume di fare in commercio (*).

(*) Affinchè meglio si comprenda che cosa sia il giorno e l'anno, i due principali elementi per la misura del tempo, esporremo sul moto apparente del Sole quelle poche notizie che ci parranno più a portata di essere intese senza il sussidio del calcolo e della figura.

Si consideri il Sole fisso in un punto dello spazio immenso che comprende l'universo, e poi s'immagini la terra rivolgersi intorno ad una retta condotta pel suo centro chiamata *asse*, nel tempo stesso che si trasporta nello spazio descrivendo una curva che circonda il sole. Il moto intorno all'asse da cui dipende la durata del giorno chiamasi *diurno*, quello lungo la curva chiamasi *annuo* per una ragione analoga.

Il cammino che segue il centro della terra nel suo moto annuo dicesi *l'orbita terrestre*, ed è una curva chiamata *ellisse* da' geometri, *ovale* in linguaggio comune. La quale si descrive piantando due stili in un piano, attaccando a' medesimi i due capi di una corda più lunga della distanza de' due punti fissi, e facendo scorrer lungo la corda, in guisa da tenerla sempre tesa, un altro stile, la cui punta segnerà sul piano la curva. I due punti fissi si chiamano i *fochi* dell'ellisse.

I centri del Sole e della Terra sono sempre nel piano dell'orbita. Ma siccome il Sole occupa uno de' fuochi, la terra non si troverà da esso sempre alla medesima distanza. E il suo moto lungo l'orbita, dipendendo dalla distanza per una legge famosa che l'osservazione e il calcolo hanno a vicenda confermata, non sarà uniforme, ma tanto più rapido quanto minore è la loro distanza.

Prima d'andare innanzi, è necessario avvertire che il moto diurno è da noi riferito a tutta la sfera celeste, a quella volta azzurra che ordinariamente chiamasi *Cielo*. Sicchè supponendo l'asse della terra prolungato indefinitamente, le sue estremità segneranno due punti nella sfera celeste che si chiamano i *poli del Mondo*. Mentre dunque la terra gira intorno al suo asse da occidente in oriente, tutta la sfera celeste apparisce moversi in senso contrario. Il moto annuo della terra è riferito al Sole che ogni giorno apparisce accostarsi verso le stelle che sono all'oriente, mentre la terra va da occidente verso oriente.

Il piano dell'orbita prolungato sino alla sfera celeste vi segna un cerchio che si chiama *ecclittica*: il sole percorre ogni giorno una parte dell'ecclittica.

L'asse della terra è inclinato al piano dell'ecclittica; ma nel suo moto si mantiene sempre parallelo. Un piano condotto pel centro della terra perpendicolarmente all'asse segnerà nella sfera celeste un cerchio che chiamasi *equatore*. Si supponga tirata pel centro della terra una retta perpendicolare all'ecclittica; i due punti ne' quali incontrerà la sfera celeste sono i poli dell' ecclittica. L'asse del mondo e questa retta comprenderanno fra loro un angolo eguale a quello d'inclinazione del piano dell'ecclittica coll'equatore. Un piano condotto per l'asse della terra segnerà un cerchio perpendicolare all'equatore, che dicesi *meridiano*.

236. Il giorno naturale si chiama anche *giornata* quando si riferisce al lavoro degli operaj o ad altra opera che gli uomini debbono

---

Considerandosi la terra come il centro della sfera celeste, i menzionati circoli si riportano ancora alla superficie della terra, e servono a fissare la posizione de' luoghi.

Lo spostamento della terra lungo l'orbita non essendo sensibile rispetto alle stelle atteso la loro immensa distanza, queste nel moto diurno descrivono sempre i medesimi cerchi paralleli all'equatore. Ma il sole, cambiando ogni giorno di sito, descrive de' cerchi più o meno lontani dall'equatore in ragione della maggiore o minore distanza che il punto in cui si trova la terra serba dal piano dell'equatore. Quando si trova all'intersezione de' due piani, apparisce descriver l'equatore, poi se ne allontana per un certo tratto, indi torna indietro e passa per l'opposto punto d'intersezione; prosegue il suo cammino allontanandosi dal lato opposto, finchè ritorna al primo punto d'intersezione. Il sole intanto descriverebbe cerchi paralleli all'equatore, se passasse per salti da uno all'altro punto dell'ecclittica. Per comprendere qual è in realtà il suo cammino, s'immagini in ogni istante condotta una retta dal centro della terra a quello del sole; questa segnerà un punto nel Cielo. L'insieme di tutti questi punti è la curva che il sole sembra descrivere col suo moto apparente, e che è una spirale simile a' risalti di una vite. Ma siccome le spire sono strettissime, dicesi ordinariamente che descrive cerchi paralleli all'equatore. È facile formarsi un'idea della curva che descrive un punto della superficie terrestre (che non sia il polo) mentre il centro descrive l'ellisse, considerando quella che descrive un punto della circonferenza di una ruota di carrozza nel tempo che il centro della ruota percorre una linea parallela alla strada. La curva della ruota, presa al rovescio, può dare un'idea esatta di quella descritta da un punto della superficie terrestre.

Quando il sole descrive l'equatore, il giorno è uguale alla notte per tutti i popoli della terra; perciò i punti d'intersezione dell'equatore coll'ecclittica si chiamano *equinozi*, e la linea che unisce gli equinozi si chiama *equinoziale*. I due paralleli fra i quali è compreso il moto del sole si chiamano *tropici*, e i punti dell'ecclittica cui corrispondono si dicono *solstizi*, perchè ivi il Sole dovendo tornare indietro apparisce restar fermo par qualche giorno.

Ciò posto, s'immagini l'istante in cui il piano di un meridiano va ad incontrare il centro del sole e passi per una stella. Se la terra girasse solamente intorno all'asse, compita la sua rivoluzione, il piano del meridiano passerebbe nuovamente per la stella e pel centro del sole. Ma avendo cangiato sito rispetto al sole, è necessario che prosegua a moversi ancora per incontrare il sole col medesimo meridiano. Si distinguono perciò due *giorni*; il *sidereo* che è il tempo di una intera rivoluzione attorno l'asse, e l'*astronomico* che è il tempo che scorre da che il sole abbandona un meridiano fino a che vi ritorna.

I giorni astronomici non son tutti eguali. L'ineguaglianza dipende da due cause: dalla non uniformità del moto della terra, e dall'inclinazione del suo asse al piano dell'ecclittica. In fatti la terra, dopo compiuta la rivoluzione intorno all'asse, ha bisogno per incontrare il sole col medesimo meridiano di un tempo tanto più lungo, quanto maggiore è la porzione di orbita percorsa. Di più il moto lungo l'orbita essendo obliquo a quello diurno che si riferisce all'equatore e sul quale si misura il tempo, quando anche la terra percorresse ogni giorno eguali porzioni di orbita, queste non corrisponderebbero ad eguali porzioni di equatore. Le due suddette cause d'ineguaglianza talora sono concorrenti, talvolta opposte.

I giorni si riducono all'eguaglianza considerando l'intervallo di più giorni consecutivi e dividendolo in parti eguali. Perciò si considera il giorno *vero* ed il *medio*. La loro differenza non eccede 30''.

Un orologio esattissimo, avendo un moto uniforme, segna il tempo medio; il passaggio del Sole pel meridiano segna il tempo vero. La differenza accumulandosi non monta in tre mesi al di là di 16 minuti in meno e 15 in più.

eseguire in piena luce. La mercede de' lavoratori si paga ordinariamente a giornata; ma nel computo della spesa di un dato lavoro si

---

Corre la mal'intesa pratica di accomodare ogni tanti giorni gli orologi per far che segnino le 12 a mezzogiorno. Si sforzano così ad andar male gli orologi che vanno bene. Sarebbe miglior consiglio tener l'orologio col tempo medio e far la correzione per mezzo delle tavole all'uopo calcolate: correzione che poi non è assolutamente necessaria per gli usi civili, nè praticabile con gli orologi comuni, il cui divario per imperfezione della macchina può esser maggiore di quello che dà il sole. Il tempo vero concorda col medio in quattro tempi dell'anno, cioè verso la metà di aprile e la metà di giugno, alla fine di agosto, e a' 23 o 24 di dicembre.

In Europa generalmente si conta il principio del giorno dal mezzodì; ed abbiamo veduto che in tal caso la differenza fra l'orologio e il Sole non può sorpassare un quarto d'ora. Ma in Italia non è del tutto abbandonato l'uso di contare il principio del dì mezz'ora dopo il tramontar del sole. Questo sistema è difettosissimo, perchè la differenza fra un tramonto e l'altro è di qualche minuto e più, e a capo di mesi giunge a più di 3 ore e mezzo in più o in meno; regolandolo con una giornata d'està o d'inverno, si troverebbe nella stagione opposta il divario notabile di poco men che otto ore fra l'orologio ed il sole. Lo stesso difetto presenterebbe il sistema di prender per principio del giorno il sorger del sole. Il levare o il tramontare di quest'astro son due punti variabili, nè possono esser presi come il principio di un periodo che dovendo servir di misura del tempo deve aver il carattere d'invariabilità.

Chiamasi *anno* il tempo che la terra mette per far l'intero giro dell'orbita. Ma per un fenomeno conosciuto sotto il nome di *precessione degli equinozi* la terra ritorna all'equinozio donde partì, ossia traversa il piano dell'equatore, prima di aver esaurita l'intera sua corsa. Mentre dunque la terra cammina per l'ecclittica, la linea degli equinozi ha un leggiero moto retrogrado che viene avvertito dal cangiamento di posizione delle stelle rispetto all'equatore; sicchè il polo dell'equatore apparisce moversi intorno a quello dell'ecclittica nello stesso periodo in cui si muove la linea equinoziale. Si distinguono perciò due anni: il *sidereo* che è il tempo che la terra spende per ritornare allo stesso punto donde partì, ed è di $365^{gi.}\ 6^{ore}\ 9'\ 7''$; ed il *tropico* o *solare* che è il tempo messo per ritornare allo stesso equinozio, ed è di $365^{gi.}\ 5^{ore}\ 48'\ 49'',7$. Questo anno è quello su cui si regola la civil Società, dipendendo da esso il ritorno delle stagioni, la cui conoscenza è di grandissima importanza per l'agricoltura.

L'anno civile è di 365 giorni; e per riparare alla differenza fra l'anno tropico e il civile, ogni quattro anni si aggiunge un giorno di più, e l'anno di 366 giorni si chiama *bisestile*. La quale aggiunta, stabilita da Giulio Cesare, supplirebbe al bisogno, se la differenza fosse di 6 ore. Essendo minore, fu stabilito dal Papa Gregorio XIII nel 1582 di non farsi bisestile il primo anno di tre secoli consecutivi, e far bisestile il primo del 4° secolo. Con tal correzione vengono ad aggiungersi 97 giorni in 400 anni. Questa intercalazione non compensa esattamente le $5^{ore}\ 48'\ 49'',7$; ma il divario non produce errore sensibile che dopo molti secoli. Gli anni bisestili dell'attual calendario son tutti quelli divisibili per 4; e degli anni secolari, quelli divisibili per 400.

Il punto equinoziale, retrocedendo ogni anno, percorre l'ecclittica in 25868 anni circa. Ma un periodo così lungo, chiamato l'*anno magno*, quantunque compia un fenomeno rimarchevole nel sistema del Mondo, non può servire per la misura del tempo.

La divisione dell'anno in 12 mesi ha certamente relazione ad un altro fenomeno celeste, il moto della Luna intorno alla Terra. Il qual moto si esegue contemporaneamente a quello che la fa girare intorno all'asse, giacchè la Luna rivolge sempre lo stesso emisfero alla terra.

S'immagini un meridiano che incontri i centri della luna e del sole. Se la

prende per unità di tempo l'ora, calcolando la giornata di 10 ore, di 12 o anche meno, secondo la stagione e la natura del lavoro.

---

luna è tra la terra e il sole si dice esser in congiunzione col sole; se poi la terra si trova in mezzo, la luna è in opposizione col sole. Nella congiunzione, essendo rivolto alla terra l'emisfero oscuro, si ha il *novilunio*; nella posizione opposta, il *plenilunio*, perchè vediamo tutto l'emisfero illuminato. I due punti corrispondenti alla congiunzione e all'opposizione si chiamano *sigizie*. Quando la luna si trova ad egual distanza dalle sigizie, noi vediamo presso a poco la metà dell'emisfero illuminato e questi punti si chiamano le *quadrature*, o primo e secondo *quarto*. Il modo diverso come ci comparisce la luna costituisce le sue *fasi*.

La rivoluzione della luna che più c'interessa è la *sinodica*, che è l'intervallo che passa da una congiunzione all'altra, cioè da un novilunio all'altro. La durata media è di 29^{gio}, 12^{or}. 44' 3'', ed è alla durata dell'anno tropico quasi come 19 a 235; vale a dire che in 19 anni solari si compiono 235 lunazioni.

L'orbita lunare è inclinata all'orbita terrestre per 5° 43' circa. I punti d'intersezione si chiamano *nodi*. La linea de' nodi ha un moto retrogrado o contrario a quello della luna, e compie l'intero giro dell'ecclittica in 18 anni e poco più.

L'osservazione grossolana delle fasi lunari ha dato probabilmente luogo al piccolo periodo chiamato *settimana*, la cui origine si perde fra le tenebre della più rimota antichità.

Il periodo di 19 anni, dopo il quale la luna ritorna in congiunzione col sole presso a poco ne' medesimi punti del Cielo, è il *ciclo lunare*, chiamato *metonico* da Metone cui se ne attribuisce la scoperta. Il numero del ciclo si chiama *aureo*, perchè in Atene fu scritto a lettere d'oro. Per aver un punto fisso che serva a far trovare questo numero, si conta per primo l'anno che precedè l'era cristiana.

Non essendo esatto il rapporto di 19 a 235 tra una rivoluzione sinodica della luna e l'anno tropico, e d'altronde essendo necessaria pel calendario la conoscenza delle lunazioni per fissare la Pasqua, si fa uso per tal oggetto dell'*Epatta*, che è un numero indicante l'età della luna nel principio dell'anno.

Il *ciclo solare* è un periodo di 28 anni, dopo del quale i giorni della settimana ritornano a cadere negli stessi giorni del mese; e se ne serve la Chiesa per conoscere il dì in cui cadono le domeniche di tutto l'anno. I giorni della settimana sono indicati con le prime lettere dell'alfabeto, dette perciò *domenicali*. Secondo il numero del ciclo che corre attualmente, retrocedendo di 28 in 28 anni, viene per primo il nono avanti l'era corrente.

L'*indizione* è un periodo di 15 anni, usato una volta da' Papi e da' Veneziani. Il primo numero si può fissare a tre anni avanti l'Era Cristiana.

Moltiplicando fra loro i tre numeri 19, 28, 15 si ha 7980 che è il *periodo giuliano*, dopo il quale i numeri de' tre cicli ritornano collo stesso ordine. Il numero nel periodo giuliano si ha aggiungendo 4713 all'anno corrente. Dividendolo per 19, per 28, per 15, i resti che si ottengono sono rispettivamente i numeri del ciclo lunare, del solare, e dell'indizione.

Si è supposto precedentemente che l'asse della terra si mantenga sempre parallelo, e che il piano dell'equatore conservi sempre la medesima inclinazione all'ecclittica. Ma ciò non è vero a rigore. L'asse della terra è agitato da un leggiero moto, per effetto del quale la sua inclinazione coll'ecclittica cambia in ogni istante. Questo fenomeno, conosciuto sotto il nome di *nutazione*, combinato con quello della precessione degli equinozi, fa conoscere che il polo del Mondo non descrive un cerchio intorno al polo dell'ecclittica, ma si muove sul contorno di una piccola ellisse, della quale il centro è sulla circonferenza del cerchio menzionato. Il moto adunque del polo è simile a quello di ogni altro punto della superficie terrestre; cioè è di rotazione e di traslazione. Il moto di rotazione, ossia quello che si esegue sulla piccola ellisse dura quanto il moto della linea de' nodi della luna, da cui dipende.

Indipendentemente della nutazione, l'obliquità media dell'ecclittica all'equa-

Si può prender per unità di tempo, secondo l'occorrenza, il giorno, l'ora, il minuto, ec.

In tutti i moti che si considerano in Meccanica, cioè, de' gravi, de' projetti, del pendolo, delle macchine, de' fluidi, ec., l'unità di tempo è il minuto secondo.

237. Il circolo essendo oggetto delle ricerche de' dotti, la sua circonferenza si è generalmente divisa in 360 parti, chiamate *gradi*; ogni grado in 60 minuti primi, il minuto primo in 60 secondi. La quarta parte della circonferenza, che dicesi *quadrante*, comprende 90 *gradi*. Per indicare 5 gradi, 7 minuti primi e 47 secondi si scrive 5° 7′ 47″.

238. La parola grado non sempre si applica alle divisioni della circonferenza, ma ancora a quelle degli strumenti fisici. In questi il numero delle divisioni è anche determinato, essendosi ordinariamente seguito quello adottato dall'inventore. Per es. nel termometro detto di Réaumur, la lunghezza del tubo compresa fra i due punti che segna il mercurio alla temperatura del gelo che si fonde e a quella dell'acqua bollente è divisa in 80 parti, dette *gradi* (*).

§ II. *Nuovo sistema metrico di Francia.*

239. Per rimediare agl'inconvenienti che presentano la gran varietà di misure e le loro arbitrarie suddivisioni, fu sul finir del passato secolo stabilito in Francia, un sistema di misure secondo le condizioni enunciate al n° 233.

Si prese per unità di misura lineare la diecimilionesima parte della distanza dal polo all'equatore sul meridiano che passa per Parigi, e questa misura si chiamò *metro*. Tutte le altre misure di estensione e di peso si fecero dipendere dal metro.

---

tore cambia pure di continuo. Ma questo cambiamento compreso fra limiti non molto estesi si compie in un periodo lunghissimo e non ancora determinato.

Queste variazioni esercitando una qualche influenza sul moto della linea equinoziale, la durata dell'anno varia di qualche secondo in ogni secolo.

Niuna causa si è finora scoperta che possa indicare una variazione nella durata del giorno medio. Sicchè la rivoluzione diurna della terra offre l'elemento più costante per la misura del tempo.

Le più diligenti osservazioni assicurano che l'asse della terra incontra la sua superficie sempre ne' medesimi punti. Per cui le diverse regioni della terra conserveranno in perpetuo il medesimo clima.

(*) Il termometro è uno strumento che serve a conoscer le differenze di temperatura. Vi sono diverse specie di termometri; ma il più comune è formato da un tubo sottilissimo di cristallo, chiuso al di sopra e terminato al di sotto da una palla o da un tubo più grande. Il tubo è ripieno fino ad una certa altezza di mercurio. Questo fluido si eleva quando fa più caldo, per la proprietà che hanno i corpi di dilatarsi col calore; e l'altezza alla quale sale il mercurio segna in una scala graduata, che è annessa al tubo, il grado di temperatura.
Non tutti i termometri sono divisi nello stesso numero di gradi. Ma sono più in uso quelli divisi in 80 parti e in 100. Il primo è il termometro di Réaumur, il secondo è il termometro detto *centigrado*.

Si adottò per unità di superficie un quadrato che ha per lato dieci metri, e che perciò si compone di 100 metri quadrati; e questa unità fu chiamata *ara*.

L'unità di volume per le legna da bruciare si chiamò *stero*, ed equivale a un cubo di lato un metro.

Un cubo che ha per lato la decima parte di un metro si prese per unità di misura di capacità, e fu chiamata *litro*. Il litro è perciò la millesima parte di un metro cubo.

L'unità di peso fu chiamata *grammo*; ed è il peso di un cubo di acqua, di lato la centesima parte di un metro. L'acqua dev'esser pura, pesata nel vuoto e ridotta al suo massimo di densità. Questo massimo non corrisponde al grado di congelazione, ma verso i 4 gradi del termometro centigrado, giacchè l'acqua nel passaggio dallo stato fluido al solido aumenta di volume.

Si seguì il sistema decimale ne' multipli e summultipli delle misure, stabilendo che il nome della misura fosse pe' multipli preceduto dalle parole prese dal greco (n° 142, N.) *deca*, *ecto*, *kilo*, *miria*, e pe' summultipli dalle parole improntate dal latino *deci*, *centi*, *milli*, ec. Perciò il decametro è una misura di dieci metri, l'ecatometro o ettometro di 100, il kilometro o chilometro di 1000, e il miriametro di 10000 metri; parimente il decimetro è la decima parte del metro, il centimetro la centesima, ec. Lo stesso ha luogo per le altre misure; per cui il chilogrammo è un peso di 1000 grammi, l'ettolitro è una misura di 100 litri; e così per gli altri (*).

L'unità monetaria è il *franco*, moneta di argento del peso di cinque grammi a $\frac{9}{10}$ di fino. Si divide in decimi e centesimi (**).

240. Non potendo una stessa unità adattarsi a' diversi usi cui son destinate le misure della medesima specie, si è secondo il bisogno presa l'unità da' multipli o da' summultipli dell'unità principale.

Essendo il *metro* la misura lineare adattata per le occorrenze del commercio, per unità di misura itineraria si prese il *chilometro*, e anche il *miriametro*, che corrisponde alla millesima parte dell'arco del meridiano compreso tra il polo e l'equatore.

Il grammo essendo un peso troppo piccolo pe' bisogni comuni, per molti generi si adottò il *chilogrammo*, che corrisponde al peso di acqua contenuto in un cubo di un decimetro di lato. Un metro cubo d'acqua distillata pesa 1000 chilogrammi.

(*) I composti dello stero non si sono mai usati. Per l'ara non si è adoperata che l'*ettara*, la *miriara*, e la *centiara*.

(**) Non solo si è fatto il franco un multiplo esatto dell'unità di peso, ma i pezzi di 5 franchi hanno un diametro tale che 27 di essi posti in contatto e coi centri in una medesima linea danno la lunghezza del metro. Basta dunque la sola moneta per somministrare l'unità di peso e di lunghezza; il che riesce di grande vantaggio nel commercio o per supplire con essa alla mancanza di misure proprie, o per rettificare quelle che si posseggono.

L'ara serviva di unità per le misure agrarie; ma per le altre misure superficiali si faceva uso della centiara che più comunemente si chiamava *metro quadrato*.

241. L'uniformità che esiste fra le suddivisioni di queste misure e il sistema di numerazione permette in un numero di poter cangiare l'unità cambiando solamente la virgola di posto. Per es. il numero 76583,73 metri equivale a 7 miriametri, 6 chilometri, 5 ettometri, 8 decametri, 3 metri, 7 decimetri e 3 centimetri, e può leggersi egualmente 76583 metri e $\frac{73}{100}$, o pure 7658 decametri e $\frac{373}{1000}$ o pure 765 ettometri e $\frac{8373}{10000}$; e così di seguito.

Non potrebbe operarsi similmente sulle misure di superficie e di volume, giacchè il cambiamento dell'unità non porta lo spostamento della virgola di una sola cifra per volta; come a suo luogo sarà detto.

242. Nello stabilire il sistema metrico si credè necessario portar la divisione decimale in tutto ciò che era oggetto di calcolo. Essendosi preso per unità degli angoli l'angolo retto, e per unità degli archi la quarta parte della circonferenza, si divise quest'arco in 100 gradi, il grado in 100 minuti primi, il minuto primo in 100 secondi. Questa divisione però non è stata generalmente seguita.

L'uniformità nel sistema delle misure esigeva pure che il giorno fosse diviso in 10 ore, l'ora in 100 minuti primi, il minuto primo in 100 secondi. Ma questa idea fu abbandonata nel nascere, in vista degli ostacoli che presentavano gli orologi esistenti, dell'incomodo di un'ora così lunga nell'esercizio delle giornaliere faccende, e del pochissimo vantaggio che se ne poteva ritrarre nel calcolo, ove è raro che entri il giorno come moltiplicatore o divisore. (*)

(*) Quantunque il cerchio sia oggetto di ricerche scientifiche, si è insensibilmente rinunziato alla divisione del quadrante in parti decimali, e si è ritornato all'antica divisione. Il ch. nostro collega professore Amante dà una spiegazione assai plausibile di questa volontaria rinunzia ad una innovazione che presentavasi sotto così favorevole aspetto. Egli fa notare (Aritm. § 89), che, dovendosi nella pratica dell'Astronomia spesso cambiar l'arco in tempo e il tempo in arco, vi è relazione intima fra la divisione del cerchio e quella del tempo. Or col divider la circonferenza in 360 parti e la giornata in 24 ore, questa traduzione è semplicissima, giacchè un'ora corrisponde ad un arco di 15 gradi, 1 minuto di tempo a 15 minuti di arco, e 1 minuto secondo di tempo a 15 secondi di arco. Divisa la circonferenza in 400 parti, svanisce questa semplicità di relazioni; e perciò esclusa la divisione decimale del tempo, quella del quadrante non potea sostenersi.

Posto ciò, il metro non è più parte aliquota del grado del meridiano; imperocchè essendo 10000000 di metri eguali a 90 gradi, il grado terrestre contiene metri 111111 $\frac{1}{9}$; e con ciò il sistema metrico ha perduta gran parte della sua semplicità, e non ha conservato che il pregio importantissimo dell'esattezza con cui furono determinate le misure.

243. Dopo essere stato sanzionato e pubblicato il sistema metrico e fatti con la maggior precisione i campioni del metro e del chilogrammo, in modo che il primo rappresentasse la lunghezza stabilita alla temperatura del ghiaccio fondente, e il secondo desse il peso nel vuoto, una nuova misura di un arco di meridiano e una più attenta revisione ne' calcoli antecedenti indussero Delambre a conchiudere che la distanza tra il polo e l'equatore è di metri 10000723,2. Si ritenne ciò non ostante il *metro legale* secondo era stato da prima determinato, che differisce da quello che si ebbe in mira di stabilire per una quantità impercettibile (*).

244. Questo sistema trovò un ostacolo insuperabile nella massa del popolo, cui riuscì impossibile di mettere la divisione decimale in relazione co' suoi bisogni. Sicchè prima gli antichi nomi, poi le antiche suddivisioni fu forza ristabilire.

Le altre nazioni profittando di un lavoro nel quale erano concorsi i dotti di tutta l'Europa, misero ogni cura per determinare i rapporti delle loro misure con quelle del sistema metrico. Quindi il metro è divenuto il termine di paragone di tutte le altre misure. Essendo inoltre il metro la misura meglio determinata che esista, il sistema metrico si trova generalmente adottato da' dotti di tutte le nazioni, che se ne servono nelle loro opere come il più conveniente alla precisione di cui lo stato attuale delle scienze ha bisogno.

§ III. *Antiche misure di Parigi.*

L'esposizione di queste misure è necessaria, non solo perchè di molte si fa ancora uso, e l'unità lineare servì per la misura dell'arco del meridiano; ma anche perchè in molte opere si trovano espressi secondo l'antico sistema parecchi risultamenti numerici importanti.

245. *Misure di lunghezza.*

L'unità era il *piede*, detto *piede del Re*, di cui si fa uso ancora presso molte nazioni nelle costruzioni navali. Si divide in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. 6 piedi formano una *tesa*.

Per le stoffe l'unità era l'*auna* $= 3^{\text{pi.}}\ 7^{\text{pol.}}\ 10^{\text{lin.}}\frac{5}{6}$.

Le misure *itinerarie* erano il miglio di 1000 tese, la *lega* di 2000 tese, la *lega comune* di 25 a grado, e la *lega marina* di 20 a grado. Dicendo lega di 25 a grado si vuol esprimere che nel grado del meridiano si contengono 25 leghe. Or siccome il quadrante si divide in 90 gradi, la sua lunghezza sarà di 2250 leghe comuni e 1800 leghe marine.

(*) Il campione del metro legale, a 6° gradi di temperatura del termometro di Réaumur, dà la lunghezza della diecimilionesima parte del quadrante del meridiano.

246. Nel determinare la lunghezza del quadrante, per istabilire i nuovo sistema metrico essendosi adoperate le antiche misure, s trovò il *metro legale* di linee 443,296. E siccome il piede è di 144 linee, il rapporto del piede al metro sarà di 144 : 443,296, ovvero di $1 : \frac{144000}{443296}$, e quindi sarà $1^{\text{piede}} = 0^{\text{me.}}\ 324839$.

Parimente essendo il quadrante del meridiano terrestre composto di 2250 leghe comuni, e di 10000000 metri legali, sarà $1^{\text{lega com.}} = \frac{10000000}{2250} = 4444^{\text{m.}}\frac{4}{9} =$ chilom. 4,444444. Nel modo stesso si trova la lega marina = chilom. 5,555555.

247. *Misure di superficie.*

L'unità per le misure agrarie era l'*arpent* composto di 100 pertiche quadrate. Ma la pertica variava nelle diverse provincie. Quella usata a Parigi era di 18 piedi.

Le altre misure si valutavano in piedi quadrati.

248. *Misure di volume.*

Pel legname di costruzione si usava la *soliva* = 3 piedi cubici; e pel legname da bruciare, la *corda*, che era un parallelepido di 8 piedi per 4, e di altezza piedi $3\frac{1}{2}$.

249. *Misure di capacità pe' liquidi.*

L'unità era il *muid*, che si divideva in 36 *setiers*, questo in 4 *quarti* o 8 *pinte*; la pinta in 2 *chopines* o 8 *poissons*. Il *muid* corrisponde a 2,6822 ettolitri, e la pinta a litri 0,9313.

250. *Misure di capacità per gli aridi.*

L'unità era ancora il *muid*, che si divideva in 12 *setiers*, o 24 *mines*, o 48 *minots*, o 144 *boisseaux*, e questo in 16 *litrons*. 1 *setier* = 1,561 ettolitri.

251. *Pesi.*

L'unità era la *libbra* (*peso di marco*) che si divideva in 2 *marchi* o in 16 *once*, l'oncia in 8 *grossi*, il grosso in 3 *scrupoli*, questo in 24 *grani*. Una libbra = 0,48951 chilogrammi.

I diamanti si pesavano a oncia di 144 carati, ognuno di 4 grani.

100 libbre formavano il *quintale*, 10 quintali il *migliaro*. La *tonnellata* di mare è eguale a 20 quintali, ovvero 2000 libbre. La tonnellata si considera anche a volume, ed è eguale a 42 piedi cubici.

252. Da' rapporti precedenti si ricava

$$1 \text{ metro} = 3^{\text{pi.}},07844,$$

$$1 \text{ chilogr.} = 2^{\text{lib.}}0^{\text{on.}}\ 5^{\text{gr.}}\ 1^{\text{sc.}}\ 11^{\text{ac.}}.$$

§ IV. *Sistema di misure attualmente in uso nella Francia.*

253. Con decreto de' 18 brumale an. IX (4 Novembre 1800) ai nomi sistematici furono sostituiti gli antichi nomi, chiamandosi *lega* il miriametro, *miglio* il chilometro, *pertica* il decametro, ec.; *muid* il chilolitro, ec; *libbra* il chilogrammo, ec.

Ma siccome l'ostacolo che impediva la diffusione del nuovo sistema nel popolo non era ne' nomi, ma nella grandezza e nelle suddivisioni dell'unità principale, si pensò a stabilire un nuovo sistema di misure, dipendente bensì dal metro, ma tale che le diverse misure non differissero sensibilmente da quelle una volta in uso tanto nella grandezza dell'unità quanto nelle divisioni.

Perciò con decreto de' 12 Febbraio 1812 si permisero le misure seguenti, che furono poi rese legali nel 1816.

1° Una misura di due metri si è chiamata *tesa*, e si è divisa in piedi, pollici e linee secondo l'antico sistema.

2° Si è chiamata *auna* una misura per le stoffe di 12 decimetri. Si divide in *mezzi*, *quarti*, *ottavi e sedicesimi.*

3° Per le misure di capacità si è chiamato *boisseau* una misura eguale all'ottava parte dell'ettolitro. Si divide in *mezzi*, *quarti*, ec.

4° La libbra in uso è uguale a mezzo chilogrammo. Si divide come l'antica libbra.

I diamanti son sempre pesati a carati di 4 grani l'uno; ma il grano attuale sta all'antico, come 4 : 3,798.

§ V. *Antiche Misure della Città di Napoli.*

254. *Misure di lunghezza.*

L'unità per l'uso comune è il *palmo* che si divideva in 12 *once*, e l'oncia in 5 *minuti.* 8 palmi formavano la *canna.*

L'unità di misura itineraria è il miglio di 60 a grado; il che significa che un grado del meridiano terrestre comprende 60 miglia; o in altri termini, che un miglio corrisponde a un minuto primo del meridiano terrestre. Il miglio si faceva ordinariamente di palmi 7024; ma la sua denominazione fa conoscere che questa è una misura di 1000 *passi*, ed è questo il *passo geografico.*

255. *Misure di superficie.*

Per le misure comuni si faceva uso del palmo quadrato, e anche della canna quadrata.

Per le misure agrarie l'unità era il *moggio*, che è un quadrato di 30 passi di lato, essendo ogni passo di palmi $7\frac{1}{3}$. In conseguenza l'antico moggio conteneva passi quadr. 900 e pal. quadr 48400.

Il passo agrario è diverso dal geografico.

Il moggio antico si divideva ordinariamente in 10 *quarte*, la quarta in 9 *none*, la nona in 5 *quinte.*

256. *Misure di capacità.*

Per gli aridi l'unità era il *tomolo*, che si divide in 24 *misure*, una misura in 24 *quartarole.*

Pel vino l'unità è il *barile* che si divide in 60 *caraffe.* Dodici barili formano una *botte*, e due botti un *carro.* Per la vendita a minuto si faceva uso di una caraffa che è $\frac{1}{66}$ del barile.

Per l'olio l'unità è lo *stajo*, che si divideva in 16 *quarti*, e il quarto in sei *misurelli*, 16 staja formavano la *salma.* Per la vendita in grande l'olio si valutava a peso; lo *stajo* si contava per rotoli $10\frac{1}{3}$.

257. *Misure di volume pe' solidi.*

La canna di legna da bruciare era un parallelepipedo di pal. 8 per 8 in superficie e di gross. pal. 4.

La fabbrica si valutava ordinariamente a canna di costumanza, che è un parallepipedo che ha per base un quadrato di pal. 8 e per gros. pal. 2. I solidi di terra, i cavamenti, ec. si valutavano a canna cuba.

Il legname di costruzione si valuta in piedi francesi. Un pezzo di lunghezza 36 piedi e di sezione 1 piede in quadro, si chiama *carro.*

258. *Pesi.*

Per alcuni generi l'unità era la libbra che si divideva in 12 *once*, l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli* o *trappesi*, il trappeso in 20 *acini* o *grani.*

Per gli oggetti preziosi l'oncia si divide in 130 *carati*, il carato in 4 *grani*, il grano in 16 *sedicesimi.*

Per le grandi masse l'unità è il *cantajo* che si divide in 100 *rotoli.* Il rotolo si compone di 1000 trappesi equivalenti a once $33\frac{1}{3}$. Il rotolo si usava anche pe' commestibili e si divideva in metà, terzi e quarti.

La calce si valuta anche a peso. 40 rotoli formano in commercio un *peso.*

§ VI. *Nuovo sistema di misure del Regno di Napoli.*

259. Delle esposte misure il solo palmo era comune a tutta la Sicilia citeriore. Le altre, e più di tutte le misure agrarie, variavano grandemente da un Paese all'altro, o nella grandezza dell'unità o nelle suddivisioni, e qualche volta anche nel nome. Da molti anni si lavorava per istabilire un sistema di misure che potesse convenire a tutto il Regno. Si era determinata la lunghezza del palmo col paragonarlo al metro, e si era trovato: $1^{pal.} = 0^{m},26367$, il che faceva che il miglio di 60 a grado medio contenesse circa 7024 palmi. Di poi era stato determinato il rapporto tra il palo cubo e le misure di capacità. Una felice combinazione, risultamento delle sperienze istituite, accelerò la riforma togliendo la principale difficoltà che era quella di contrariare le abitudini del popolo. In effetti, considerando

che in origine il miglio per la sua denominazione stessa dovea costare di 1000 passi, e che il passo esser dovea di 7 palmi, era facile conchiudere, che il palmo esser dovesse la settemillesima parte del miglio; e che se desumendolo dal campione esistente si era trovato un poco più piccolo, la differenza dovea attribuirsi all'alterazione occasionata dalle copie fatte, alla mancanza di campioni precisi, e forse ancora alla misura del grado medio del meridiano terrestre, la quale non potea certamente eseguirsi con quella precisione che lo stato attuale delle scienze ha permesso di portare nello stabilire il sistema metrico francese. Riguardato il miglio, o l'arco di un minuto primo, di 7000 palmi, il grado del meridiano conterrà palmi 7000×60, e il quadrante conterrà palmi $7000 \times 60 \times 90$, cioè palmi 37800000. Si avrà perciò 37800000 palmi $=$ 10000000 metri, ovvero 378 palmi $= 100$ metri; d'onde $1^{pal.} = \frac{100^{met.}}{378} = 0^{m.},26455$. Ora adottando questo nuovo palmo che differisce da quello in uso per una quantità impercettibile, si trova un rapporto semplicissimo tra il palmo e le altre misure, sicchè si rendeva semplicissimo il formare un sistema metrico senza introdurre sulle misure in uso altre variazioni, che la divisione decimale. Sulle basi preparate precedentemente, con Decreto de' 6 Aprile 1840 fu stabilito il seguente sistema metrico. (*)

260. La base dell'intero sistema è il *palmo*, settemillesima parte di un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre, ovvero la settemillesima parte del miglio geografico d'Italia, o del miglio nautico del grado medio del meridiano medesimo. Esso si divide in parti decimali. 10 palmi formano una *canna*.

L'unità superficiale è la canna quadrata, ovvero il quadrato che ha per lato 10 palmi e che contiene 100 palmi quadrati.

L'unità di misura de' solidi è la canna cuba, eguale a 1000 palmi cubici.

Per definizione si ha 378 palmi $=$ 100 metri, e quindi

$$1^{met.} = 3,78 \text{ palmi}, \quad \text{e} \quad 1^{pal.} = 0^{m.},26455.$$

L'unità superficiale delle misure agrarie è il *moggio* di diecimila

---

(*) Fra quelli che con utilità si sono occupati di questo importantissimo oggetto debbono notarsi il ch. Brigadiere Visconti e il ch. cav. Gran Croce D. Carlo Afan de Rivera. Il primo ne ha trattato in diverse memorie, ha scoperto i rapporti semplici che ha il palmo rettificato col tomolo e col barile, e fin dal 1815 avea introdotto ne' lavori geodetici dell'Officio Topografico il passo geodetico, millesima parte del miglio di 60 al grado. L'altro in un'opera pregevolissima intitolata, *della restituzione del nostro sistema di pesi e misure alla sua antica perfezione*, ha mostrato che non trattavasi di riformar le misure, ma di restituire alla sua originaria grandezza e perfezione il sistema esistente fin da' tempi di Ferdinando I di Aragona; e avendo introdotto fin dal 1830 il palmo rettificato e la divisione decimale nel servizio delle opere pubbliche dipendenti dalla Direzione di Ponti e Strade, ha mostrato col fatto, che niun ostacolo si opponeva per la diffusione pronta del sistema decimale.

palmi quadrati, cioè un quadrato che ha per lato 100 palmi, o 10 canne. Si divide in parti decimali.

L'unità di misura di capacità per gli aridi è il *tomolo*, eguale a tre palmi cubi. Si divide in due *mezzette*, o in quattro *quarte*, o in 24 *misure*, ciascuna delle quali eguaglia il cubo del mezzo palmo (*). La misura degli aridi si prende a *raso* e non a *colmo*.

L'unità di misura per alcuni liquidi, come il vino, l'aceto, ec. è il *barile*, che è uguale ad un cilindro retto del diametro di 1 palmo e di tre palmi di altezza. Il barile si divide in 60 *caraffe*, e 12 barili formano una *botte*, che corrisponde ad un cilindro retto di tre palmi di diametro e 4 di altezza.

L'olio dev'esser misurato a peso. Pel commercio a minuto potrà misurarsi a capacità; ma le misure debbono esser cilindriche e corrispondenti al peso d'olio che debbono contenere alla temperatura di 20° del termometro centigrado.

L'unità de' pesi è il *rotolo* che si divide in parti decimali; la sua millesima parte è il *trappeso*. Cento rotoli formano un *cantajo*. Il rotolo paragonato al chilogrammo dà il seguente rapporto:

$$1^{\text{rot.}} = 0{,}890997 \text{ chilogrammi.}$$

Un palmo cubo d'acqua distillata pesa in Napoli nell'aria rotoli 20 e trappesi 736 alla temperatura di 16°,144 centigradi e alla pressione barometrica di 76 centimetri = pal. 2,865.

261. Dal paragone delle antiche misure colle nuove risulta, che 100 moggia antiche equivalgono a 478 moggia nuove; e perciò

$$1^{\text{mog. ant.}} = 4{,}78 \text{ moggia nuove.}$$

Siccome tre rotoli contengono 100 once, e tre libbre contengono 36 once, si avrà che 100 libbre formano 36 rotoli; e perciò

$$1^{\text{lib.}} = 0{,}36^{\text{rot.}}$$

Non sarà inutile notare che un miglio quadrato, essendo uguale a 7000 × 7000 palmi quadrati, contiene moggia nuove 49000.

262. Volendo esprimere in palmi cubi il barile bisogna moltiplicare la base che è un cerchio di diametro 1, ovvero di raggio 0,5, per 3. Ora, siccome si sa dalla geometria, il cerchio suddetto si ottiene moltiplicando 0,5 × 0,5 per 3,1415926536, che è il rapporto della circonferenza al diametro (n° 230). Fatto il calcolo si ha

$$1^{\text{bar.}} = \text{pal. cub. } 2{,}35619449,$$

e il peso di un barile d'acqua è rot. 48,858.

(*) Essendo il cubo di $\frac{1}{2}$ eguale a $\frac{1}{8}$, sarà il cubo del mezzo palmo eguale a $\frac{1}{8}$ del palmo cubo, o a $\frac{3}{24}$ dello stesso palmo cubo, o a $\frac{1}{24}$ di 3 palmi cubi.

§ VIII. Sistema di misure della Sicilia.

263. Nella Sicilia ulteriore, che presentava anche una grande varietà di misure, fu nel 1809 stabilito il seguente sistema di misure:

L'unità lineare è il *palmo* che si divide in 12 once, l'oncia in 12 *linee*, là linea in 12 *punti*. Una *canna* = 8 palmi.

Il *miglio* è di palmi 5760, e si divide in 45 *corde*, ogni corda in 4 *catene*, essendo la catena di 4 canne.

L'unità di misura agraria è la *salma* che è un quadrato che ha per lato 64 canne. Si divide in 4 *bisacce*, questa in 4 *tomoli*; il tomolo, che è un quadrato che ha per lato 16 canne, si divide in 4 *mondelli*, il mondello in 4 *carozzi*, questo in 4 *quarti*, risultando il quarto di 4 canne quadrate.

L'unità di misura di capacità per gli aridi è il *tomolo* che eguaglia un palmo cubo. Si divide in 4 *mondelli* = 16 *carozzi* = 64 *quarti* = 256 *quartigli*. La *salma* è di 16 tomoli.

Pe' liquidi l'unità è il *quartaro* che pure eguaglia 1 palmo cubo. Si divide in 20 *quartucci*, o in 40 *caraffe*; e questa in 4 *bicchieri*. Il *barile* è di due quartari e la *botte* di 32 barili.

L'unità de' pesi è il *rotolo* che è il peso della ventesima parte di un palmo cubo di olio di oliva puro alla temperatura di $14°\frac{2}{3}$ di Réaumur. Si divide in 30 *once*, l'oncia in 8 *dramme*, la dramma in 3 *denari*, il danaro in 20 *grani o cocci*, il grano in 8 *ottavi*. La libbra è di 12 once, e il cantajo di 100 rotoli.

Il palmo Siciliano sta a quello di Napoli come 40 : 41, sicchè 40 palmi di Napoli formano 41 palmi di Sicilia, e per conseguenza si ha

$$1^{\text{pal. nap.}} = 0{,}97561 \text{ pal. sic.},$$

$$1^{\text{pal. sic.}} = 1{,}025 \text{ pal. nap.}$$

Un rotolo di Sicilia si è trovato = chil. 0,79342.

A R T. II.

Moltiplicazione de' numeri complessi della medesima specie.

264. Si è detto (n° 194) che il prodotto de' numeri che esprimono le misure di due linee rappresenta la misura di una superficie.

Quando i fattori lineari sono interi o espressi in frazioni decimali la formazione di questo prodotto non ammette alcuna difficoltà, giacchè le parti decimali del prodotto rapportandosi all'unità principale ne esprimeranno la parte decima, centesima, ec. Per es. trattandosi di moltiplicare $237^{\text{met.}},35$ per $12^{\text{m.}},41$, si considereranno questi fattori come numeri astratti e poi si darà al prodotto la denominazione dell'unità superficiale cui si riferisce. Si avrà dunque per risultamento 2945,5135 metri quadrati, ossia 2945 metri quadrati, più 5145 diecimillesimi di un metro quadrato.

Se però questo prodotto si volesse esprimere in quadrati che hanno per lati le diverse parti nelle quali si divide il metro lineare, bisogna osservare che siccome 1 metro contiene 10 decimetri, un metro quadrato conterrà decimetri quadrati 10×10 ovvero 100. Per la stessa ragione un decimetro quadrato contiene 100 centimetri quadrati; 1 centimetro quadr. 100 millimetri quadrati, e così di seguito. Per conseguenza un metro quadrato conterrà 100 decimetri quadr., 10000 centimetri quadr., 1000000 millimetri quadrati, e così per gli altri. Quindi i centesimi del metro quadrato esprimono decimetri quadr., i diecimillesimi esprimono centimetri quadr., ec. In guisa che il prodotto ottenuto si enuncia: 2943 m. quadr., 51 decim. quadr., 35 centim. quadrati.

Quel che si è detto relativamente alle parti decimali del metro quadrato è applicabile ancora a' diversi ordini di unità che sono a sinistra della virgola. Di fatto, siccome il decametro è eguale a 10 metri, un decametro quadrato conterrà 100 metri quadrati; parimente un ettometro ne conterrà 10000, ec; per cui le centinaja del metro quadr. esprimono decametri quadr., le diecine di migliaja rappresentano ettemetri; ec.

Da ciò segue che per enunciare in misure quadre un numero espresso in parti decimali, bisogna, a partir dalla virgola, separar le cifre a due a due andando verso la destra e poi verso la sinistra. Moltiplicando 734m.,232 per 27m.,483, si ottiene per prodotto 20178,898056 che può enunciarsi: 2 ettare, 1 ara, 78 metri quadrati, 89 decimetri quadr., 80 centimetri quadr., 36 millim. quadrati.

Se il numero delle cifre decimali fosse impari, per leggerlo in misure quadre bisognerà renderlo pari aggiungendo un zero alla destra. Così 3,715 metri quadrati si legge: tre metri quadr., 71 decim. quadr. e 50 centimetri quadrati.

Se dunque si vuol cambiare il nome dell'unità principale, bisogna spostar la virgola di due posti per volta; e non già di uno come nelle misure lineari (n° 203). Quindi il numero ettare 2,0178898056, si può leggere: are 201,78898055, o pure metri quadr. 20178,898056, o pure decim. quadr. 2016889,8056, ec.

Queste medesime conseguenze si possono dedurre ancora del ragionamento seguente. Avendosi i due fattori 734m.,242 e 27m.,483, il loro prodotto si riferirà al quadrato che ha per lato il metro; ma se si moltiplica 7342,32 decimetri per 264,83 decimetri, il prodotto si riferirà al quadrato che ha per lato un decimetro; se si considerano i fattori riferiti al centimetro, cioè si moltiplica 73423,2 centimetri per 2747,3 centimetri, il prodotto sarà espresso in centimetri quadrati; parimente avendosi 73,4232 decametri per 2,7483 decametri, il prodotto sarà in decametri. E ben si vede che lo spostamento della virgola di un posto in ciascun fattore porta il passaggio di due cifre nel prodotto. È inoltre evidente che i due fattori dovendosi rapportare alla medesima unità, in ciascun fattore la virgola deve ricevere un eguale spostamento. Che se i numeri da moltiplicarsi fossero 3m.,74, e 2m.,3, si tratterebbe di mol-

tiplicare 374 centimetri per 230 centimetri; la qual cosa rende evidente, che per esprimere in misure quadre le parti decimali del prodotto bisogna render pari il numero delle cifre decimali.

È da osservarsi in ultimo che $\frac{1}{10}$ di metro quadrato equivale a un rettangolo che ha per lato 1 metro e per alt. 1 decimetro, che $\frac{1}{100}$ di metro quadrato equivale a un rettangolo di 1 metro per un centimetro, ec. In conseguenza il numero 375,2473 metri quadrati può rappresentare la misura di un rettangolo che ha per base un metro e per altezza 375,2473 metri.

265. Le medesime considerazioni si possono applicare ai prodotti di tre fattori lineari. Per esemp. il prodotto de' tre fattori 4m.,72, 15m.,19, 37m.,34 è 2677,158312 metri cubi, e tutte le cifre poste a destra della virgola esprimono parti decime, centesime, ec. del metro cubo. Volendo esprimere queste frazioni in cubi che hanno per lati le parti del metro lineare, basterà riflettere che 1 metro cubo contiene 1000 decimetri cubi, che 1 decimetro cubo contiene 1000 centimetri cubi, ec.; quindi si ha 1 metro cubo = 1000 decimetri cubi = 1000000 centim. cubi = 1000000000 millim. cubi, ec. Da ciò segue:

1° Che le parti millesime del metro cubo esprimono decimetri cubi, che le milionesime corrispondono ai centimetri cubi, ec.;

2° Che per la medesima ragione le migliaja corrispondono ai decametri cubi, i milioni agli ettometri, ec.;

3° Che se una misura cubica espressa in decimali si vuole enunciare in cubi che hanno per lato i diversi ordini di unità di cui si può comporre l'unità lineare, bisogna separar le cifre a tre a tre partendo dalla virgola e andando prima verso la destra e poi verso la sinistra;

4° Che a tale oggetto bisogna che il numero delle cifre decimali sia multiplice di 3; e se non è, renderlo tale aggiungendo, secondo il bisogno, o uno o due zeri;

5° Che volendo cangiare il nome dell'unità principale bisogna trasportare la virgola di tre cifre per volta.

Per es. il numero 37583,69327 metri cubi corrisponde a 37 decàm. c., 583 metri cubi, 637 decim. cubi, 270 centim. cubi.

Questo numero si può parimente considerare come rappresentante la misura di un parallelepipedo rettangolo, che ha per base un metro quadrato e per altezza metri 37583,69327.

266. Il caso in cui le misure lineari sono espresse in numeri complessi è il solo che si presenti nel quale si tratti di moltiplicare fra loro due numeri complessi della medesima specie (n° 130). Conoscendo che il prodotto di due fattori lineari deve riferirsi all'unità superficiale, la quale è il quadrato fatto sull'unità lineare, il primo modo che si presenta è quello di ridurre i due numeri dati ad unità dell'infima specie. Si farà allora il prodotto come se

fossero numeri astratti, e l'unità cui si riferirà questo prodotto sarà il quadrato avente per lato l'unità dell'infima specie contenuta nelle misure lineari. Per esprimere poi questo prodotto in misure quadre che hanno per lati le diverse parti nelle quali si divide l'unità principale, bisogna conoscere quante unità quadrate di un ordine si contengono nell'unità immediatamente superiore, ed operare poi sul prodotto secondo è stato fatto al n° 129.

Si tratti per es. di moltiplicare 28^tes. 5^p. 8^pol. 2^lin. per 13^tes. 2^p. 5^pol.. Si riducano questi due numeri a linee (n° 117), e si avrà 25010 linee da moltiplicare per 11580 linee. Il prodotto sarà 289615800 linee quadrate. Per esprimer questo prodotto anche in pollici quadr., piedi quadrati e tese quadrate, si osserverà, che essendo 1 tesa = 6 piedi, sarà 1 tesa quadr. = 36 piedi quadr.; parimente essendo 1 piede = 12 pollici, sarà 1 pied. quadr. = 144 pollici quadr.; e per la medesima ragione 1 pollice quadr. = 144 linee quadr. Si tratterà dunque di far su quel numero l'operazione del n° 119, dividendo successivamente per 144, 144, 36. La qual cosa effettuata dà

387 tes. quad., 34. pi. q., 116 poll. quad., 120 lin. quad.

238. Ma l'operazione eseguita secondo questo metodo riesce alquanto lunga, giacchè conduce ad operare sopra numeri molto grandi. Si può con vantaggio sostituire a questo il metodo di *prendere in parti* (n° 129), esprimendo il prodotto in rettangoli che abbiano tutti per base l'unità principale e per altezza le diverse parti nelle quali si divide e suddivide questa unità. Nell'esempio proposto, prendendo il primo fattore per moltiplicando, e facendo il prodotto per 1 tesa, si avrà la misura di un rettangolo che ha per uno de' lati una tesa e per l'altro lato 28^t. 5^pie. 8^pol. 2^lin.; e secondo la natura della moltiplicazione questo rettangolo starà al prodotto che si cerca come 1^tes. : 13^te. 2^p. 5^pol.. Si potrà dunque riguardare il moltiplicatore come numero astratto, e allora l'operazione è ridotta a ripetere il menzionato rettangolo 13 volte e poi prenderne quella stessa parte che 2^p. 5^pol. è di 1 tesa. Ora il rettangolo che ha per uno de' lati 1 tesa e per l'altro 28^t. 5^p. 8^pol. 2^lin. si scompone in rettangoli che hanno tutti per base 1 tesa, e per altezze rispettive un certo numero di tese, o di piedi, o di linee.

I rettangoli di 1 tesa per 1 tesa, di una tesa per 1 piede, di 1 tesa per 1 linea si chiamano rispettivamente *tese-tese* o *tese-quadrate*, *tese-piedi*, *tese-pollici*, *tese-linee.* L'operazione è dunque ridotta a moltiplicare una superficie per un numero astratto, cioè 28^t.t. 5^t.p. 8^t.pol. 2^t.lin. per $13+\frac{2}{6}+\frac{5}{72}$; e osservando che le tese-tese, tese-piedi, tese-pollici serbano fra loro lo stesso rapporto che serbano le unità lineari corrispondenti alle altezze, giacchè i rettangoli della medesima base stanno fra loro come le altezze, l'operazione con l'uso delle parti aliquote può esser condotta nel modo che qui si vede.

	28t.t.	5t.pi.	8t.pol.	2t.lin.		
	13t.	2p.	5pol.			
	84					
	28					
prod. per 3t.p.	6	3t.pi.				(si prende la metà di 13).
. . . . . . 2t.p.	4	2				(si prende il terzo di 13).
. . . . . . 6t.pol.	1	0	6t.pol.			
. . . . . . 2t.pol.	0	2	2			
. . . . . . 2t.lin.	0	0	2	2t.lin.		
. . . . . . 2pi.	9	3	10	8	$\frac{2}{3}$	(si prende il terzo del moltiplicando).
. . . . . . 4pol.	1	3	7	9	$\frac{4}{9}$	
. . . . . . 1ol.	0	2	4	11	$\frac{13}{36}$	
	387t.t.	5t.pi.	9t.pol.	7t.lin.	$\frac{17}{36}$	

Per convertire questo prodotto in misure quadre si osserverà che

1t.pi. $=$ 6p. $\times$ 1p. $=$ 6 piedi quadr. ;
1t.pol. $=$ 72pol. $\times$ 1pol. $=$ 72 pol. quadr. $= \frac{1}{2}$ piede quadrato ;
1t.lin. $=$ 864 lin. quadr. $=$ 6 pol. quadr.

Si avrà quindi

387t.t. $=$	387t.qu.			
5t.pie. $=$		30pi.qu.		
9t.pol. $=$		4	72pol.qu.	
7t.lin. $=$			42	
$\frac{17}{36}$ t.lin. $=$			2	120lin.qu.
somma . .	387t.qu.	34pi.qu.	116pol.qu.	120lin.qu.

risultamento identico a quello trovato precedentemente.

239. Quando si tratta di moltiplicar fra loro tre fattori lineari dati sotto la forma di numeri complesssi, si presenta tosto l'idea di ridurli ad unità dell'infima specie contenuta in essi, e il loro prodotto si rapporterà al cubo che ha per lato questa medesima unità. Per esprimere questo prodotto in misure cubiche si opererà in un modo analogo a quello esposto per le misure quadre.

Si tratti di moltiplicar fra loro i tre fattori

28tese 2pi. 8pol. 2lin., 13t. 2pi. 5pol., 7t. 4pi. 9pol. 2lin.

Ridotti a linee, si hanno i tre fattori

2,010lin. , 11580lin. , 6734lin. ,

il prodotto de' quali è 1950272797200 lin. cubiche.
Ora si ha

1 tesa cub. $= 6 \times 6 \times 6$ pi. cub. $=$ 216 pi. cub. ,
1 pi. cub. $= 12 \times 12 \times 12$ pol. cub. $=$ 1728 pol. cub. ,
1 pol. cub. $=$ 1728 lin. cub.

Facendo dunque sul numero ottenuto l'operazione del n° 110 , adoperando successivamente i divisori 1728 , 1728 , 216 , si avrà il prodotto espresso in misure cubiche , cioè

5023t.cub. 174pi.cub. 1680lin.cub,

240. Questo metodo riesce tanto più lungo e penoso , quanto più grandi sono i fattori , e maggiore il numero delle parti nelle quali ciascuna unità si suddivide.

Per seguire anche in questo caso un metodo analogo a quello esposto per le misure di superficie , bisogna osservare che il prodotto de' primi due fattori espresso in tese-tese , tese-piedi , ec. è

$$387^{t.t.}\ 5^{t.pi.}\ 9^{t.pol.}\ 7^{t.lin.}\ \frac{17}{36}$$

Questo prodotto esprime la misura di un rettangolo che ha per uno de' lati 1 tesa e per l'altro lato $387^{t.}\ 5^{pi.}\ 9^{pol.}\ 7^{lin.}\ \frac{17}{36}$. Se questo rettangolo si moltiplica per una tesa , si avrà un parallelepipedo rettangolo che ha per base questa superficie e per altezza 1 tesa ; e per conseguenza starà al parallelepipedo che si cerca come $1^{t.} : 7^{t.}\ 4^{pi.}\ 9^{pol.}\ 2^{lin.}$. Si potrà dunque considerare questo fattore come numero astratto , e allora si tratterà di ripeter quel solido 7 volte , e poi prenderne quella parte che $4^{pi.}\ 9^{pol.}\ 2^{lin.}$ è di 1 tesa. Ora quel parallelepipedo rettangolo , avendo due lati eguali ad 1 tesa , è identico col parallelepipedo rettangolo che ha per base una tesa quadrata e per altezza $387^{t.}\ 5^{pi.}\ 9^{pol.}\ 7^{lin.}\ \frac{17}{36}$, e questo parallelepipedo si può scomporre in altri parallelepipedi che hanno tutti per base una tesa quadrata , e per altezze le diverse parti nelle quali si può scomporre il menzionato numero. Siccome questi parallelepipedi stanno fra loro come le altezze , si farà il prodotto pel terzo fattore , come se si trattasse di moltiplicare una misura lineare per un numero astratto ; e il metodo di *prendere in parti* (n° 129) dà con facilità il prodotto espresso in parallelepipedi rettangoli che hanno tutti per base una tesa quadrata e le altezze espresse in tese , o piedi , o pollici , o linee :

Di questi diversi solidi quello che ha per altezza 1 tesa è la tesa cuba e s'indica per t. t. t. ; quello che ha per alt. 1 piede si chia-

ma *tesa-tesa-piede* e s'indica per t. t. pi. ; quello che ha per altezza 1 pollice è la *tesa-tesa-pollice* e si nota per t. t. pol.; finalmente quello che ha per altezza 1 linea è la *tesa-tesa-linea*, indicata per t. t. lin. Secondo questo modo di scrivere si dovrà fare il prodotto di 387t.t.t. 5t.t.pi. 9t.t.pol. 7t.t.lin. $\frac{17}{36}$ per 7t. 4pi. 9pol. 2lin. , considerato come numero astratto. Ecco l'operazione.

	387t.t.t.	5t.t.pi.	9t.t.pol.	7t.t.lin.	$\frac{17}{36}$	
	7t.	4pi.	9po.	2lin.		
	2709t.t.t.					
per 3t.t.p.	5	3t.t.pi.				
. . 2	2	2				
. . 6t.t.pol.	0	3	6t.t pol.			
. . 3	0	1	9			
. . 1						0t.t.t. 0t.t.pi. 7t.t.pol.
. . 6t.t.lin.	0	0	3	6t.t.lin.		
. . 1	0	0	0	7		
. . $\frac{12}{36}$	0	0	0	2	$\frac{1}{3}$	
. . $\frac{4}{36}$	0	0	0	0	$\frac{7}{9}$	
. . $\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{7}{36}$	
. . 3pi.	193	5	10	9	$\frac{53}{72}$	
. . 1	64	3	11	7	$\frac{53}{216}$	
. . 6pol.	32	1	11	9	$\frac{269}{432}$	
. . 3	16	0	11	10	$\frac{701}{864}$	
. . 1						5 2 3 11t.t.l. $\frac{1565}{2592}$
. . 2lin.	0	5	4	7	$\frac{14325}{15552}$	
	3023t.t.t.	4t.t.pi.	10t.t.pol.	1t.t.lin.	$\frac{10187}{15552}$	

Volendo convertire questo prodotto in misure cubiche, è necessario osservare che

$$1\text{t.t.pi.} = 6\text{pi.} \times 6\text{pi.} \times 1\text{pi.} = 36\text{pi.cub.}$$

$$1\text{t.t.pi.} = \frac{36\text{pi.cub.}}{12} = 3\text{pi.cub.}$$

$$1\text{t.t.lin.} = \frac{3\text{pi.cub.}}{12} = \frac{1728\text{pol.cub.}}{12} = 432\text{pol.cub.}$$

Si avrà dunque

$323^{t.t.t.}$ =	$3023^{t.cub.}$			
$04^{t.t.pi.}$ =		$144^{pi.cub.}$		
$10^{t.t.pol.}$ =		30	$432^{pol.cub.}$	
$1^{t.t.lin.}$ =				
$\frac{10187}{1552}$ t.t-lin. =			282	$1680^{lin.cub.}$
somma . . . =	$3023^{t.cub.}$	$174^{pi.cub.}$	$714^{pol.cub.}$	$1680^{lin.cub.}$

241. La prolissità di questi calcoli, l'attenzione che si richiede per condurli a termine senza errori, la impossibilità di verificare l'esattezza del risultamento con una operazione più semplice che serva di *prova* (n° 133), e finalmente il confronto con quelli semplicissimi esposti sul sistema metrico (n^i^ 235 e 236); fanno conoscere ad evidenza, che se grande è il vantaggio della divisione decimale nelle misure in generale, vieppiù importante si rende l'applicarla all'unità lineare, che serve di elemento per le misure quadrate e cubiche.

ART. III.

Conversione delle misure.

242. Basta conoscere quale rapporto passa fra le unità di due misure della stessa specie per convertire l'una nell'altra.

Così sapendo che $1^{met.} = 3,78$ palmi di Napoli, si ha $1^{pal.} = \frac{1}{3,78}$ metri. In effetti si vede che si ha $378 : 100 :: 1^{m.} : 1^{pal.}$, e quindi

$$1^{pal.} = \frac{100}{378} \text{ metri} = 0^{m},26455,$$

$$1^{met.} = 3,78 \text{ palmi}.$$

Similmente essendo $1^{rot.} = 0,890997^{chil.}$ sarà

$$1^{ch.} = \frac{1000000}{890997} \text{ rot.} = 1,122338^{rot.}$$

243. Si può anche con facilità trovare il rapporto di due misure, allorchè si conoscono i rapporti che queste hanno con una terza. Per es. il rotolo di Napoli eguagliando chilogr. 0,890997, e il rot. di Sicilia chilog. 0,79342, sarà evidentemente

$$1 \text{ rot. sic.} = \frac{793420}{890997} \text{ rot. nap.} = 0,8905 \text{ rot. nap.}$$

$$1^{rot. nap.} = \frac{890997}{793420} \text{ rot. sic.} = 1,12298 \text{ rot. sic.}$$

Similmente essendo $1^{met.} = 3,78^{pal.\ nap.}$, e $1^{met.} = 3,07844^{pie.par.}$, si avrà $3,78^{pal.\ n.} = 3,07844^{pi.}$, e quindi $1^{pal.n.} = \frac{3,07844}{3,78}$ p.par.. = $0,8144^{piedi}$, e $1^{pie.} = \frac{3,78}{3,07844} = 1,22788$ pal.

244. Se si vuol esprimere una misura in un'altra allorchè si conoscono diversi rapporti intermedi di cui le due misure date formano i termini estremi, si farà uso della regola congiunta (n° 183). Per es. si voglia trovare il rapporto tra il piede francese e il palmo di Sicilia, e si sa che

$$1^{pi.} = 0,324839 \text{ met.}$$

$$1^{m.} = 3,78 \text{ pal. nap.}$$

$$1^{pal.\ n.} = 0,97591 \text{ pal. sic.}$$

Sarà

$$1^{pi.} = 0,324839 \times 3,78 \times 0,97561 \text{ pal. sic.} = 1,19794 \text{ p. sic.}$$

245. Conoscendo i rapporti tra le misure lineari, è facile trovare i rapporti tra le misure quadrate e cubiche. Per es. essendo $1^{m.} =$ 3,78 p. n., sarà un metro quadr. = pal. quad. $3,78 \times 3,78 = 14,2884$ pal. quad.; quindi 1 pal. quadr. $= \frac{1}{14,2884} = 0,069986842$ m. qu.;

$$1 \text{ metr. cub.} = 3,78 \times 3,78 \times 3,78 \text{ pal. c.} = 54,010152 \text{ p. c.};$$

e perciò

$$1 \text{ pal. c.} = \frac{1}{54,010152} = 0,0185150377 \text{ m. cubi.}$$

Essendo un pal. quadrato = 0,069986842 metri quad., sarà un moggio nuovo napolitano = 699,86869 met. qu. = 6,998687 are.

Essendosi trovato un barile = pal. cub. 2,35619449 (n°262), sarà

$$1 \text{ barile} = 2,35619449 \times 0,0185150377 \text{ m. cubi} = 0,0436250 \text{ m. cubi.}$$

E siccome un metro cubo contiene 1000 decimetri cubi, e il litro è la capacità di un decimetro cubo, sarà

$$1 \text{ barile} = 43,62450 \text{ litri.}$$

Per la stessa ragione sarà

$$1 \text{ tomolo} = 0,0185150377 \times 3 \text{ litri} = 55,545113 \text{ litri.}$$

246. Non s'incontrerà alcuna difficoltà allorchè una misura espressa in numero complesso si vuol convertire in un'altra, di cui le parti del-

l'unità principale sono anche espresse in numero complesso; imperocchè basterà in generale esprimer le frazioni della misura data in decimali (n° 115), poi moltiplicar la misura così espressa pel rapporto dato, e in fine convertire la frazione decimale di questo prodotto in numero complesso (n° 121)

Per es. il numero 59can. 2pal. 5on. 2min. delle antiche misure di Napoli si voglia esprimere in tese, piedi, pollici e linee della misura di Parigi. Il numero dato equivale a palmi $474\frac{27}{60} = 474\frac{9}{20} =$ 474,45. E siccome 1 palmo = 0,8144pie., sarà 474,45pal. = 474,45 × 0,8144 piedi = pi. 386,39208 = 64tes. 2pi. 4pol. 8lin.,46.

Si voglia ancora il numero 3mog. 7quar. 5none 3quin. dell'antica misura di Napoli convertire in moggia nuove. La misura data equivale a moggia $3,7\frac{28}{45}$ e queste equivalgono a moggia nuove

$3,7\frac{28}{45} \times 4,84 =$ mog. nuove 18,20916.

Con queste norme sarà facile convertire una misura qualunque in un'altra della stessa specie, e anche esprimerla, se si vuole, in numero complesso.

ART. IV.

De' rapporti di alcune altre principali misure con quelle del sistema metrico.

247. Sarebbe impossibile senza uscir da' limiti di una discreta brevità, riportar qui con minuta particolarità tutte le misure di cui si fa uso, siccome si è fatto per quelle di Francia e di Napoli. Osserviamo però che quanto ai nomi e alle suddivisioni dell'unità, è facile nel Paese ove si dimora fornirsi delle notizie necessarie per gli ordinari bisogni; e d'altronde si può, in mancanza di conoscenze opportune sul modo di divider l'unità, supplire co' decimali. Quello che più inporta, e che riesce più difficile a sapersi, è il rapporto che le misure hanno fra loro.

Ci contenteremo di riportar qui i rapporti che hanno con le misure del sistema metrico quelle di cui si può avere maggior bisogno per relazioni scientifiche o commerciali.

248. *Misure di lunghezza per l'uso comune.*

Palmo di Barcellona = met.	0,1976	(1 canna = 2 vare = 8 palmi)
» Castiglia . . .	0,20914	(1 vara = 4 palmi)
» Firenze . . .	0,2918	(1 brac. d.° *a panni* = m. 0,5836)
» Genova . . .	0,2491	(1 br. = pal. $2\frac{1}{3}$)
» Lisbona . . .	0,2192	
» Malta	0,2817	(1 can. = 8 palmi)
» Roma	0,2234	(1 can. = 8 palmi)
» Sardegna . .	0,2480	(1 can. = 8 palmi)

Piede di Valenza . . .	0,2275	
» Anversa . . .	0,2868	
» Amsterdam . .	0,2831	(1 pi.=3 pal., 1 tesa = 6 piedi)
» Baviera . . .	0,3120	
» Berlino . . .	0,3100	
» Bologna . . .	0,3803	
» Brusselles . .	0,2737	
» Castiglia. . .	0,2789	(4 palmi = 3 piedi)
» Cracovia. . .	0,3564	
» Danzica . . .	0,2869	
» Dresda . . .	9,2831	
» Edimburgo . .	0,3060	(1 yard. = metri 0,930)
» Ferrara . . .	0,4039	
» Ginevra . . .	0,4879	
» Inghilterra . .	0.3047945	(1 yard. =3 pie.= $\frac{1}{2}$ fathom)
» Lipsia. . . .	0,2822	
» Macerata. . .	0,3583	
» Modena . . .	0,5230	
» Mantova . . .	0,4669	
» Monaco . . .	0,2891	
» Norvegia. . .	0,3140	
» Padova e Vicenza	0,3574	
» Praga. . . .	0,3002	
» del Reno	0,313854	
» di Roma. . . .	0,297896	
» Russia . . .	0,3542	
» Svezia . . .	0,2970	(1 faden = 3 aune = 6 piedi)
» Torino . . .	0,3230	
» Venezia . . .	0,3474	
» Vienna . . .	0,3161	(Klafter = 6 piedi)

249. *Misure itinerarie.*

Miglio di 60 a grado, adottato in tutta l'Italia = $\frac{1}{3}$ della lega marina in uso nella Francia, nell'Inghilterra, nel-l'Olanda e nella Polonia . . . . . = Chilom.	5,556
» Alemagna { grande di 15 a grado	7,408
» Alemagna { piccolo	6,274
» Danzica	7,749
» Danimarca = 1200 aune :	7,532
» Olanda di 75 a grado	1,609
» Inghilterra (legale) = 1760 *yards*	1,851
» Scozia	1,814
» Turchia	1,670
Lega di 25 a grado, in uso nella Francia e in Amburgo .	4,444
» Boemia di 16 a grado	6,950
» Olanda di 18664 piedi del Reno	5,857
» Portogallo di 18 a grado	6,173
» Scozia di 50 a grado	2,224

» Spagna = 8000 vare di Castiglia	6,693	
» Svezia = 6000 faden	10,687	
Werst di Russia	1,067	

250. *Pesi.*

Libbra di

Amsterdam { di comm. = 16 on... = chilogr.	0,4941	1 cant = 100 lib.
Amsterdam { peso di mar. = 2. mar.	0,4922	1 tonn. = 20 cant.
		1 last = 2 tonn.
Berlino = 16 once	0,4683	
Bologna	0,3619	
Brusselles { di commercio	0,4685	
Brusselles { peso di troy	0,4967	
Castiglia, in uso in tutta la Spagna	0,4601	
Copenague	0,5001	
Ferrara	0,3458	
Firenze	0,3395	
Genova	0,3169	1 cant. = 100 rot. = 150 lib.
Ginevra { forte	0,5507	
Ginevra { sottile	0,4589	
Inghilterra { detta *troy*	0,3732	
Inghilterra { detta *avoirdupois*	0,4533	1 ton. = 2240 lib.
Lipsia (di commercio)	0,4660	
Milano { peso grosso = 28 once	0,7628	
Milano { peso sottile = 12 once	0,3268	
Prussia = 2 marchi di Colonia = 32 loths $= \frac{1}{66}$ del peso di 1 piede cubo del Reno di acqua distillata a 15° R.	0,4677	1 quint. = 100 lib. 1 last di mare = 40 quint.
Roma	0,3392	
Russsia	0,4093	
Svezia (detta *victualia*) = 32 loths	0,4246	
Torino	0,3688	
Venezia { peso grosso	0,4773	
Venezia { .. sottile	0,3012	
Vienna	0,5601	

ARITMETICA FILOSOFICA

APPENDICE

AL TRATTATO ELEMENTARE

DI

ARITMETICA

1. È *grandezza o quantità* tutto ciò che è capace di aumento o diminuzione calcolabile.

2. Due grandezze si dicono *omogenee* o della stessa specie, quando una di esse, ripetuta un sufficiente numero di volte, può eguagliare o superare l'altra; sono *eterogenee* nel caso contrario.

3. L'aumento o la diminuzione di una grandezza si conosce col confronto. Il quale può istituirsi o fra due stati diversi di una stessa grandezza, o fra due grandezze della medesima specie.

4. Il confronto può aver per oggetto o di conoscer l'ineguaglianza di due grandezze, o di determinare in che modo l'una può esser formata per mezzo dell'altra. Il risultamento del primo confronto si chiama *differenza*; quello del secondo, *rapporto.*

5. Nel secondo modo di paragonare, la grandezza che serve di termine di paragone a tutte quelle della medesima specie si chiama *unità.* Se una delle grandezze che si paragonano è l'unità, il rapporto si chiama *numero.*

6. Quando l'unità è conosciuta, il numero dà un'esatta idea della grandezza e ne esprime la *misura. Misurare* significa *trovare il rapporto di una grandezza con la sua unità.*

7. Una grandezza può esser considerata o mettendola in rapporto con altre della medesima specie, o isolatamente per conoscere le proprietà dipendenti dalla sua figura. Nel primo caso o è divisa o si concepisce divisa in parti; nel secondo si considera come un sol tutto senza divisioni di parti. Perciò la grandezza è *discreta* o *continua*.

8. La scienza che esamina le proprietà della grandezza o nello stato in cui è, o nelle sue variazioni, ad oggetto di misurarla, si chiama *Matematica*.

9. Due o più grandezze sono *commensurabili*, quando esiste una terza grandezza che può esser contenuta esattamente un certo numero di volte nelle grandezze date. Questa terza grandezza si chiama la *loro comune misura*. Due grandezze per le quali non esiste misura comune si dicono *incommensurabili*.

Due grandezze commensurabili possono aver molte misure comuni: di queste è utile aver la più grande.

10. Un numero è *intero* o *frazionario* secondo che la misura comune tra esse e l'unità è la stessa unità o una quantità minore dell'unità.

Dunque un numero intero si può considerare come la riunione di più unità, e un numero frazionario con la riunione di alcune unità con una porzione dell'unità.

Ogni porzione dell'unità si chiama *frazione*.

11. Un numero è *astratto*, se si riferisce ad un'unità non definita; e *concreto*, se è indicata l'unità.

12. La *differenza* fra due grandezze non può conoscersi se queste non sono espresse per mezzo della loro misura comune considerata come unità. Quindi il confronto che dà la differenza suppone già fatto quello che somministra il rapporto.

13. Il rapporto che una grandezza ha con un'altra, è uguale maggiore o minore dell'unità, secondo che la prima grandezza è uguale maggiore o minore dell'altra. Il rapporto, indicando in che modo una grandezza può esser formata per mezzo dell'altra, è indipendente dall'unità delle grandezze che si paragonano, e perciò è sempre numero astratto.

Dunque il rapporto non cambia, cambiando l'unità de' due numeri.

14. I numeri sono infiniti. Per scriverli tutti, conveniva immaginare un sistema che richiedesse l'uso di pochi caratteri. Di tutti i sistemi quello che mirabilmente corrisponde all'oggetto consiste nel dare alle cifre due valori; uno assoluto, l'altro di posizione; cioè nel far che ogni cifra esprima sempre lo stesso numero di unità, ma l'unità cui deve riferirsi cangi di grandezza secondo il posto. Si è convenuto che i posti si contino da destra verso sinistra,

e che l'unità vada crescendo o decrescendo con legge costante, secondo che si va da destra verso sinistra o al contrario. Il numero delle unità necessarie per formare un'unità dell'ordine immediatamente superiore è la *base* del sistema di numerazione. I caratteri sono quante le unità contenute nella base; e i numeri interi si scrivono addossando l'una cifra all'altra.

La scelta della base non influisce sul sistema, ma sull'uso che può farsene nel misurare, sulla facilità più o meno grande di concepire i numeri, e sul numero delle cifre che si richieggono per scriverli. Il numero delle cifre necessarie per rappresentare un numero è minore quando la base è più grande; ma questo vantaggio renderebbe difficile il concepir i numeri e combinarli. La base più utile è quella che senza esser molto grande presenta molti modi diversi di dividerla in parti eguali. Per poter leggere e comporre i numeri è necessario che il linguaggio, ossia la numerazione parlata, sia in corrispondenza esatta con la numerazione scritta. Introdotta una base, non si potrebbe cambiare per l'impossibilità di riformare una lingua.

15. I numeri frazionari, non essendo composti di sole unità intere, e dovendosi rapportare ad una misura comune minore dell'unità, non si possono scriver senza adoperar due cifre: una, la quale esprima quante volte la misura comune è contenuta nel numero, e l'altra quante volte nell'unità; o in altri termini, perciò che queste sono delle grandezze rapportate ad una unità più piccola, una esprime che parte è questa nuova unità dell'unità principale, e l'altra è il numero di queste unità. Il primo che dà la denominazione all'unità si chiama *denominatore*; il secondo che numera le unità, *numeratore.*

16. Si rende inutile il denominatore, quando la grandezza dell'unità cui si riferisce il numeratore può essere indicata altrimenti. Ciò avviene ne' seguenti casi:

1° Quando la legge di decremento dell'unità segue il sistema di numerazione;

2° Quando si tratta di misure le cui suddivisioni sono conosciute.

Nel primo caso basta scriver le cifre l'una a destra dell'altra, e fissare con un segno il posto dell'unità principale. Il segno adottato è una virgola. Nel sistema attuale le cifre poste a destra della virgola si chiamano *decimali.*

Nell'altro caso basta scrivere a fianco del numero il nome della misura. Tali numeri che contengono unità di diversa grandezza, non legate che da una dipendenza arbitrariamente stabilita, si chiamano *complessi.*

Dunque, come il sistema in uso è un caso particolare di un sistema ad una base qualunque, così questo è di un numero complesso.

17. Per passare da un'unità ad un'altra di quelle comprese nel sistema, basta trasportar la virgola. La nuova unità è più grande

o più piccola secondo che la virgola si trasporta verso la sinistra o verso la destra.

18. Il modo più semplice per comporre i numeri interi è quello di aggiungere l'unità a se stessa, poi a questo numero un'altra unità, e così aggiungendo sempre l'unità al numero ottenuto si può arrivare a quel numero che si vorrà. Ma siccome per ottenere il risultamento del confronto istituito fra due numeri è necessario scomporre, così da' due diversi modi di paragonare i numeri nascono pure due diverse maniere per comporli. Quindi le operazioni fondamentali e principali da farsi sui numeri si riducono necessariamente a quattro.

19. Allorchè ad un numero si aggiungono tante unità quante ne contiene un'altro, de' due numeri se ne forma un solo, che contiene tante unità, quante i due numeri presi insieme. Si chiama *addizione* l'operazione, e *somma* il risultamento di essa. I numeri dati sono le parti, e la somma è il tutto da esse formato.

20. L'operazione inversa, cioè quella in cui è dato il tutto e una delle parti si tratta di trovare l'altra parte, si chiama *sottrazione*. Or siccome questa operazione deve farsi togliendo dal numero più grande tante unità quante ne contiene il più piccolo, il risultamento dell'operazione si chiama *resto*, perchè è precisamente ciò che resta dal numero più grande dopo averne tolto il più piccolo; ed *eccesso* perchè mostra di quante unità il numero più grande supera il più piccolo. E poichè con la suddetta operazione si viene a stabilire un confronto fra i due numeri dati, dal quale si conosce se sono eguali o disuguali, il risultamento dell'operazione è precisamente la *differenza* (n° 4).

Queste tre voci, *resto eccesso* e *differenza*, applicate al risultamento di una medesima operazione, si riferiscono al diverso modo di considerare la scomposizione di un numero in due parti, di cui una è data.

21. Da ciò segue che queste due operazioni, addizione e sottrazione, possono aver luogo solamente sopra numeri omogenei espressi per mezzo della stessa unità. Perciò le frazioni non possono sommarsi se non hanno lo stesso denominatore.

E se si tratta di numeri composti di parti rapportate ad unità di diversa grandezza, o bisogna esprimer queste parti colla stessa unità, o conviene operare separatamente sopra ciascun ordine di unità. In quest'ultimo caso nell'addizione importa che in ogni somma parziale si tolgano le unità dell'ordine immediatamente superiore e si riuniscano alla somma seguente; e nella sottrazione, quando il numero delle unità da sottrarsi è maggiore di quelle da cui si debbono sottrarre, conviene, per render possibile l'operazione, staccare un'unità dell'ordine superiore e riunirla a quella su cui

si sta operando. Questa condizione esige che l'operazione incominci dalle unità dell'ordine più piccolo e proceda da destra verso sinistra.

Ne' numeri interi, quantunque essi naturalmente si trovino espressi per mezzo della stessa unità, si preferisce di considerare ciascuna cifra come riferita ad un' unità diversa, affinchè l'operazione si riduca a quella de' numeri di una cifra.

Se si tratta di frazioni che hanno lo stesso denominatore, si opererà su i numeratori come se il denominatore non vi fosse; il quale resta nel risultamento per indicare la grandezza dell'unità de' numeri su cui si è operato.

Quindi, queste due operazioni comprendono due casi distinti; il primo è quello in cui i numeri o nella totalità o nelle loro diverse parti si possono esprimer sotto forma d'interi, e l'altro è quando i numeri si presentano sotto forma di frazioni con diverso denominatore. Nel primo caso l'operazione si esegue senza alcuna preparazione; nel secondo conviene preparare i numeri, ed esprimerli per mezzo della stessa unità, cioè ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

22. Se per comporre un numero in vece di far uso dell'unità (n° 18) si adopera un altro numero, l'operazione si chiama *moltiplicazione*, la quale riducesi a *comporre un numero per mezzo di un altro, nel modo stesso che un altro numero si comporrebbe per mezzo dell'unità*. Il risultamento dell'operazione si chiama *prodotto*, il numero che serve di elemento per la composizione del prodotto è il *moltiplicando*, e quello che paragonato con l'unità dà la norma per la composizione si chiama *moltiplicatore*. Il moltiplicando e il moltiplicatore sono i *fattori* del prodotto.

Da ciò si raccoglie, che in questa operazione il prodotto dev'esser sempre della stessa natura dell'elemento da cui deriva cioè del moltiplicando, e il moltiplicatore che si paragona all'unità astratta è sempre un numero astratto. Quindi i diversi casi della moltiplicazione dipendono dalla riduzione del moltiplicatore a numero astratto.

Se il moltiplicatore è numero incomplesso, si può senza difficoltà riguardare come numero astratto. Se è numero complesso, per farlo figurare da numero astratto, o bisogna metterlo sotto forma di numero frazionario, o considerare le sue diverse parti come frazioni astratte dell'unità principale.

Quindi tutti i casi della moltiplicazione si riducono a due, quello del moltiplicatore intero, e quello del moltiplicatore frazionario.

23. L'operazione inversa della precedente, cioè quella in cui dato il prodotto e uno de' fattori si cerca l'altro fattore, si chiama *divisione*. Il numero che corrisponde al prodotto si chiama *dividendo*; il fattore dato *divisore*; quello che si cerca, *quoziente*. La divisione ha dunque per oggetto di trovare un numero che moltiplicato pel divisore riproduca il dividendo.

Siccome nella moltiplicazione uno de' fattori è della stessa natura

del prodotto e l'altro è numero astratto, perciò se il fattore dato è della stessa natura del dividendo, il quoziente sarà numero astratto; e se il fattore dato è numero astratto, il quoziente sarà della stessa natura del dividendo.

Nel primo caso il quoziente, rappresentando in che modo il dividendo è composto per mezzo del divisore, esprimerà il loro rapporto, perciò che il risultamento del confronto di due grandezze della stessa specie, ossia il rapporto, è precisamente il numero che indica in che modo l'una è formata per mezzo dell'altra.

Quando poi il divisore è numero astratto, si tratterà di comporre per mezzo del dividendo un numero sulla stessa maniera che dal divisore si comporrebbe l'unità.

Quindi per far dipendere da un sol principio i diversi casi della divisione, si tratterà di ridurli tutti a quello in cui il divisore è numero astratto; il che si farà nel modo stesso che si segue nella moltiplicazione. E perciò la divisione comprende due casi distinti; quello in cui il divisore è intero, e quello in cui è frazionario.

24. Segue dalla natura stessa di queste due operazioni che per moltiplicare o dividere un numero per la base, basta trasportar le sue cifre di un posto verso la destra o verso la sinistra.

25. Quando il moltiplicatore è numero intero, la moltiplicazione riducesi a *ripetere* il moltiplicando tante volte quante unità contiene il moltiplicatore. I numeri che si formano per mezzo del moltiplicando ripetendolo, si chiamano i suoi *moltiplici*.

Se il moltiplicando è composto di diversi ordini di unità, fa d'uopo eseguir su ciascuna parte l'operazione, e poi riunire i risultamenti, col fare il riporto delle unità dell'ordine superiore, come nell'addizione.

Rispetto al moltiplicatore, siccome il prodotto dev'esser composto dal moltiplicando come il moltiplicatore è composto dall'unità, ne segue;

1° Che se il moltiplicatore è composto di diverse parti, il prodotto totale è uguale alla somma di tutti i prodotti risultanti dalle diverse parti del moltiplicatore;

2° Che se il moltiplicatore costa di più fattori, il prodotto totale si può ottenere facendo successivamente i prodotti pe' diversi fattori del moltiplicatore.

3° Che se il moltiplicatore si scompone nelle unità de' suoi diversi ordini, conviene fare i prodotti per le sue diverse cifre e classificarli secondo l'ordine delle unità del moltiplicatore.

Deriva da ciò che quest'operazione per rispetto al moltiplicando deve cominciar sempre dalla destra, e rispetto al moltiplicatore può cominciare o dalla destra o dalla sinistra.

26. Quanto alla divisione, se il divisore è intero, si deve riguardare il dividendo come risultante dalla somma de' diversi prodotti parziali che nascono moltiplicando il divisore per le diverse parti del quo-

ziente. Le quali si trovano scomponendo il dividendo in parti divisibili separatamente pel divisore. Questa scomposizione è facilissima, perocchè si stacca dal dividendo, cominciando dalla sinistra, una parte che contenga il divisore, in modo però che il quoziente sia di una sola cifra; trovata questa, che sarà dello stesso ordine del dividendo parziale, si farà il prodotto di essa pel divisore, e questo prodotto si sottrarrà dal dividendo parziale. Il resto che si ottiene, dovendo esser minore del divisore, si convertirà in unità dell'ordine immediatamente inferiore, e si unirà con le unità di quest'ordine: sarà questo un secondo dividendo parziale e l'operazione si proseguirà nello stesso modo.

Trattandosi di numeri interi, i dividendi parziali si trovano più facilmente, perchè basta addossare al resto la cifra seguente del dividendo.

27. Siccome in una frazione il denominatore è un segno per indicar la grandezza dell'unità del numeratore, ne segue che tutte le operazioni che non dipendono dalla grandezza dell'unità si eseguono sul numeratore come se il denominatore non vi fosse, e questo resta nel risultamento per far lo stesso officio.

Inoltre il denominatore indicando in quante parti è stata divisa l'unità, è evidente che dividere una sola unità e poi ripeterla tante volte quante unità contiene il numeratore equivale a dividere ciascuna unità del numeratore e poi riunire i risultamenti. Dunque una frazione è una divisione indicata, cioè è un quoziente rappresentato per mezzo de' suoi stessi elementi.

Dunque:

1° Si moltiplica una frazione pel suo denominatore, cancellandolo. Ma col sopprimere il denominatore si cambia unità; perciò la moltiplicazione corrisponde a un cambiamento di unità.

2° S'indica la divisione di un intero per un altro, scrivendo il divisore come denominatore. Ma il denominatore cambia l'unità; perciò la divisione è anche cambiamento di unità.

3° Viceversa, per cambiare unità bisogna fare una moltiplicazione o una divisione.

4° Un rapporto può essere rappresentato per mezzo di una frazione.

5° Un rapporto non cambia, cambiando l'unità de' suoi termini (n° 13); quindi se i termini di una frazione si moltiplicano o si dividono per lo stesso numero, la frazione non cambierà di valore.

6° Siccome le operazioni eseguite sul numeratore producono lo stesso effetto che sugl'interi, segue dal coroll. preced. che quelle sul denominatore debbono produrre effetto contrario. Quindi moltiplicando il denominatore, si divide la frazione; e dividendolo, si moltiplica.

7° Perciò si moltiplica una frazione per un intero o moltiplicando il suo numeratore o dividendo il denominatore; e si divide, o dividendo il numeratore, o moltiplicando il donominatore.

8° Una frazione si rende più semplice dividendo per qualche numero i suoi termini.

9° Potendo una frazione essere espressa sotto infinite forme differenti e conservare lo stesso valore, sarà facile esprimere con lo stesso denominatore molte frazioni che lo hanno diverso. Il denominatore comune sarà il più piccolo numero divisibile per tutti i denominatori.

10° Perchè una frazione si ottiene dividendo l'unità pel denominatore e ripetendo il quoziente tante volte quante unità contiene il numeratore, eseguendo su questa frazione operazioni contrarie si ritornerà all'unità. Chiamando *inverse* due frazioni composte degli stessi termini inversamente scritti, si vede che si passa da una frazione all'unità moltiplicandola per la frazione inversa.

28. Fissata così la natura e le proprietà delle frazioni, si ricava immediatamente:

1° Che per sommare o sottrarre più frazioni con diverso denominatore, bisogna prima ridurle allo stesso denominatore, cioè esprimerle per mezzo della stessa unità;

2° Che si moltiplica un numero qualunque per una frazione, moltiplicandolo pel numeratore e dividendolo pel denominatore;

3° Che si divide un numero per una frazione, moltiplicandolo per la frazione inversa, cioè moltiplicandolo pel denominatore e dividendolo pel numeratore.

4° Che siccome la divisione si riduce a moltiplicazione invertendo il divisore, la moltiplicazione si cambierà in divisione dividendo un fattore per la frazione inversa dell'altro fattore.

29. I quattro termini di due rapporti eguali costituiscono una *proporzione*.

I primi termini di ogni rapporto si chiamano *antecedenti;* e i secondi, *conseguenti*.

Un rapporto esprimendo in che modo un numero può esser formato per mezzo di un altro, ne segue, che nella moltiplicazione, l'unità, il moltiplicatore, il moltiplicando e il prodotto formano una proporzione; e nella divisione, il dividendo, il quoziente, il divisore e l'unità formano una proporzione.

30. È una conseguenza necessaria dell'eguaglianza de' rapporti che se in una proporzione gli antecedenti sono eguali, anche i conseguenti saranno eguali, e viceversa.

Poichè un rapporto non cambia, moltiplicando i suoi termini per un medesimo numero (n° 13), ne segue che se in una proporzione si moltiplicano i primi due termini per l'antecedente del secondo rapporto, e gli altri due termini per l'antecedente del primo rapporto, ne risulta una proporzione che ha gli antecedenti eguali; perciò i conseguenti saranno pure eguali. E si ha il primo conseguente moltiplicato pel secondo antecedente, eguale al primo antecedente moltiplicato pel secondo conseguente; cioè: *in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale al prodotto de' medii.*

31. Da questa proprietà risulta :

1° Che si possono cambiar di posto i termini di una proporzione, purchè gli stessi due termini restino o sempre in mezzo o sempre negli estremi ;

2° Che dati i primi tre termini, per trovare il quarto, fa d'uopo moltiplicare i due medii e dividere il prodotto per l'estremo.

32. Siccome un rapporto non cambia dividendo i suoi termini per un medesimo numero, e i termini medii si possono cambiar di posto, ne segue :

1° che si possono dividere i due antecedenti o i due conseguenti per un medesimo numero :

2° che quando trattasi di trovare il quarto proporzionale, conviene prima sopprimere i divisori comuni, o de' primi due termini, o de' due antecedenti ;

3° che quando per questa operazione un termine si riduce all'unità, la ricerca del quarto proporzionale riducesi o ad una moltiplicazione o ad una divisione ;

4° che siccome un termine si può sempre ridurre all'unità, esprimendo un altro termine sotto forma di frazione, la moltiplicazione o le divisione di un intero per una frazione corrisponde alla ricerca di un quarto proporzionale.

33. Quando vi sono molte proporzioni che hanno un rapporto comune, giova esprimer questo rapporto sotto forma di frazione, perchè allora questa frazione diviene un *modulo* comune che abbrevia la ricerca dei quarti proporzionali ; siccome ha luogo nella regola di società.

34. Potendosi un rapporto anche esprimere sotto forma di frazione, se si hanno molte proporzioni, si avrà una serie di frazioni rispettivamente eguali ad altre frazioni. Quindi il prodotto di tutte le prime frazioni sarà eguale al prodotto di tutte le seconde; cioè il rapporto *composto* da' primi sarà eguale al rapporto composto da' secondi; o in fine quando si hanno molte proporzioni, e si moltiplicano i termini in corrispondenza, i prodotti formeranno una proporzione.

Di qui si deduce come possa trovarsi un termine che dipende da molte proporzioni.

INDICE

Pag.	*V.*	*Errori*	*Correzioni*
10	14	3 unità	5 unità
20	9 *da sotto*	5973	4973
21	15 *da sotto*	39	37
22	10	40	38
23	26	5683	5673
25	9	59,900	59,000
27	22	472	372
»	11 *da sotto*	n° 36	n° 39
29	6	n° 38	n° 39
43	3	n° 73	n° 80
54	ultimo	$\frac{13}{24}$	$\frac{91}{168}$
55	4 *da sotto*	4 cifre	3 cifre
60	31	7,4051515	7,4041666...
63	7	284341''	283541''
»	10 *da sotto*	diviosori	divisori
64	28	sotto sotto	sotto
»	29	spesie	specie
70	7	$4\frac{5}{4}$.	$4\frac{4}{5}$.
»	17	3 den.	5 den.
72	27	pezze 35	pezze 45
79	penult.	12436	14436
98	21	440	540
101	10	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{8}$
102	7 *da sotto*	$\frac{12}{23}\cdots\frac{5}{25}$	$\frac{12}{25},\cdots\frac{5}{23}$
103	7 *da sotto*	$384\times1,07$	$384\times1,06$
107	3 *da sotto*	alla metà	alla terza parte
111	9	0,854	0,864
117	15	816	716
118	2 *da sotto*	15230	15250
126	14	$123\,\overline{123}$	$132\,\overline{132}$
129	2	36 si scrive 6	37 si scrive 7
136	10	$\frac{333}{105}$	$\frac{333}{106}$
145	ult.	della	dalla
150	1	i	il
»	2	s	si
156	11 *da sotto*	7342,32	7342,42
157	11 *da sotto*	637 decim.	693 decim.